# Sexta Lista

**MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III**

Prof. Daniel Victor Tausk

07/04/2019

**Exercício 1.** Considere a região triangular $T \subset \mathbb{R}^2$ de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(1,2)$ e uma distribuição de matéria sobre $T$ com densidade de massa por área dada pela função $\mu : T \to [0,+\infty[$ definida por

$$\mu(x,y) = xy,$$

para todo $(x,y) \in T$. Determine a massa total contida na região $T$.

**Exercício 2.** Considere o retângulo $R = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e uma distribuição de matéria sobre $R$ com densidade de massa por área dada pela função $\mu : R \to [0,+\infty[$ definida por

$$\mu(x,y) = \operatorname{sen}(2x+y),$$

para todo $(x,y) \in R$. Determine a massa total e o centro de massa dessa distribuição de matéria.

**Exercício 3.** Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ a região limitada do plano determinada pela parábola de equação $x = y^2$ e pela reta de equação $y = x$. Considere uma distribuição de matéria sobre a região $A$ com massa total $M > 0$, sendo essa massa uniformemente distribuída sobre a região $A$ (isto é, a densidade de massa por área é constante sobre a região $A$). Calcule o momento de inércia dessa distribuição de matéria em torno do eixo dado pela reta de equação $y = -1$.

**Exercício 4** (exercício que não tem nada a ver com integral para motivar a noção de momento de inércia)**.** Considere uma partícula de massa $m > 0$ cuja trajetória no espaço parametrizada pelo tempo é dada por uma curva derivável $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sejam $r : I \to [0,+\infty[$, $\theta : I \to \mathbb{R}$ e $z : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis[1] tais que

$$\gamma(t) = \big(r(t)\cos\big(\theta(t)\big), r(t)\operatorname{sen}\big(\theta(t)\big), z(t)\big),$$

para todo $t \in I$, isto é, $r(t)$, $\theta(t)$ e $z(t)$ são coordenadas cilíndricas para o ponto $\gamma(t)$. Dado $t \in I$, temos que o *momento linear* da partícula no instante $t$ é $p(t) = m\gamma'(t)$, o *momento angular* da partícula no instante $t$ é $L(t) = \gamma(t) \wedge p(t)$ e a *velocidade angular escalar em torno do eixo* $z$ da partícula no instante $t$ é $\omega_z(t) = \theta'(t)$. Seja $L_z(t)$ a componente $z$ (isto é, a terceira coordenada) do vetor $L(t)$. Mostre que:

$$L_z(t) = mr(t)^2\omega_z(t),$$

para todo $t \in I$. Temos que $mr(t)^2$ é justamente o *momento de inércia em torno do eixo* $z$ da partícula no instante $t$.

[1] Essas funções sempre existem se a partícula nunca cruza o eixo $z$. Se ela cruzar o eixo $z$, podemos perder a derivabilidade de $r$ e a continuidade de $\theta$.

**Definição 1.** A *integral de Riemann* de uma função $f$ a valores em $\mathbb{R}^n$ é definida como sendo o vetor de $\mathbb{R}^n$ cuja $i$-ésima coordenada é a integral de Riemann da $i$-ésima função coordenada de $f$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Em outras palavras, integrais de Riemann de funções a valores vetoriais são calculadas coordenada por coordenada.

**Definição 2.** Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ uma região do plano onde há uma distribuição de matéria com densidade de massa por área dada por uma certa função $\mu : A \to [0, +\infty[$. Seja $\vec{v} : A \to \mathbb{R}^2$ um campo de velocidades num certo instante de tempo $t_0$ para essa distribuição de matéria, isto é, para todo $q \in A$, $\vec{v}(q)$ é a velocidade vetorial no instante $t_0$ da partícula que está no ponto $q$. A *densidade de momento por área* no instante $t_0$ para essa distribuição de matéria é a função $\mu_p : A \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mu_p(q) = \mu(q)\vec{v}(q),$$

para todo $q \in A$ e o *momento total* no instante $t_0$ numa região (Jordan mensurável) $B \subset A$ é dado pela integral $\iint_B \mu_p$ da densidade de momento $\mu_p$ na região $B$ (caso essa integral exista). A *densidade de energia cinética por área* no instante $t_0$ para essa distribuição de matéria é a função $\mu_E : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mu_E(q) = \frac{1}{2}\,\mu(q)\|\vec{v}(q)\|^2,$$

para todo $q \in A$ e a *energia cinética total* no instante $t_0$ numa região (Jordan mensurável) $B \subset A$ é dada pela integral $\iint_B \mu_E$ da densidade de energia cinética $\mu_E$ na região $B$ (caso essa integral exista).

**Exercício 5.** Considere uma distribuição de matéria sobre o plano com densidade de massa por área dada por $\mu(x, y) = x^2 + y^2$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Suponha que num certo instante de tempo $t_0$ essa distribuição de matéria tenha um campo de velocidades dado por $\vec{v}(x, y) = (-y, x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcule o momento total e a energia cinética total dessa distribuição de matéria no instante $t_0$ contido na região triangular $T$ de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

## Respostas

**Exercício 1.** A massa é:

$$\iint_T xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_0^{2x} xy\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x + \int_1^2 \Big(\int_0^{4-2x} xy\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = \frac{4}{3}\,\cdot$$

**Exercício 2.** A massa é:

$$M = \iint_R \operatorname{sen}(2x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2x+y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = 1.$$

A primeira coordenada do centro de massa é

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\iint_R x\operatorname{sen}(2x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen}(2x+y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

e a segunda coordenada do centro de massa é:

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\iint_R y\operatorname{sen}(2x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\operatorname{sen}(2x+y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

de modo que o centro de massa é o ponto $\big(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\big)$.

**Exercício 3.** A área da região $A$ é:

$$\iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_{y^2}^{y} \mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\,\cdot$$

Portanto, a densidade (constante) $\mu$ de massa por área é igual a $6M$. O momento de inércia é dado por:

$$\iint_A \mu(y+1)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_{y^2}^{y} \mu(y+1)^2\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \frac{23}{10}\,M.$$

**Exercício 5.** O momento total em $T$ é dado por

$$\iint_T (x^2+y^2)(-y,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_{y-1}^{1-y} (-yx^2-y^3, x^3+xy^2)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y$$
$$= \Big(-\frac{2}{15}, 0\Big)$$

e a energia cinética total em $T$ é dada por:

$$\iint_T \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_{y-1}^{1-y} \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y = \frac{7}{90}\,\cdot$$