Sexta Lista

MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk
05/05/2012

Definição. Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de números reais. Escrevemos:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

se para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n > M$ para todo $n \geq n_0$. Escrevemos:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$$

se para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_n < M$ para todo $n \geq n_0$.

Exercício 1. Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de números reais. Mostre que:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} (-x_n) = -\infty.$$

Exercício 2. Sejam $(x_n)_{n\geq 1}$ e $(y_n)_{n\geq 1}$ seqüências de números reais. Mostre que se:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty,$$

então:

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$

Mostre também o resultado análogo obtido trocando $+\infty$ por $-\infty$. (Sugestão: você pode obter o resultado com $-\infty$ como corolário do resultado com $+\infty$ usando o resultado do Exercício 1.)

Exercício 3. Encontre exemplos de seqüências de números reais $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ satisfazendo:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = -\infty,$$

e também:

(a) $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = L$, onde L é um número real arbitrário;
(b) $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty$;
(c) $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = -\infty$;
(d) $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$ é limitada e não converge.

(Você deve encontrar um exemplo para cada item! Não tente encontrar um exemplo só que satisfaça todos os itens, isso é obviamente impossível.)

Exercício 4. Sejam $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ seqüências de números reais. Mostre que se $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ e se $(y_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência limitada então $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty$. Mostre também o resultado análogo com $-\infty$ no lugar de $+\infty$.

Exercício 5. Sejam $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ seqüências de números reais. Suponha que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ e que existam $n_0 \in \mathbb{N}^*$ e $c > 0$ tais que $y_n \geq c$, para todo $n \geq n_0$. Mostre que:

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n y_n) = +\infty.$$

Mostre que a hipótese que fizemos sobre a seqüência $(y_n)_{n\geq 1}$ é satisfeita se $(y_n)_{n\geq 1}$ converge para um número real positivo ou se $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.

Exercício 6. Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de números reais não nulos. Mostre que:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|x_n|} = +\infty.$$

Exercício 7. Seja $a \in \mathbb{R}$. Mostre que:

(a) se $a > 1$ então $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$. (Sugestão: use a *desigualdade de Bernoulli* que diz que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$.)

(b) Se $|a| < 1$ então $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 6.)