Sexta Lista

MAT0122 – Álgebra Linear I

Prof. Daniel Victor Tausk

26/05/2014

Exercício 1. Considere o espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios $1 - x^2$ e x^3.

Exercício 2. Suponha $\mathbb{R}^5$ munido de seu produto interno canônico e seja $V \subset \mathbb{R}^5$ o espaço solução do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

Determine uma base ortonormal para V.

Exercício 3. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ que minimizam o valor da integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big[x^2 - (a + b\,\mathrm{sen}\,x + c\cos x)\big]^2\,\mathrm{d}x.$$

Exercício 4. O *traço* de uma matriz quadrada X, denotado por $\mathrm{tr}(X)$, é a soma dos elementos da diagonal principal de X. Mostre que a igualdade:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{t}}), \quad A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

define um produto interno no espaço vetorial $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e que vale a fórmula:

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij},$$

onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$.

Exercício 5. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ um conjunto ortogonal formado por vetores não nulos de V. Mostre que o conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é linearmente independente.

Exercício 6. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e seja $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortogonal de V. Mostre que, para todo $v \in V$, as coordenadas $[v]_{\mathcal{B}} = (v_1, \ldots, v_n)$ de v na base $\mathcal{B}$ são dadas por:

$$v_i = \frac{\langle v, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Exercício 7. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de V. Mostre que:

$$\langle v, w\rangle = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n,$$

para todos $v, w \in V$, onde $(v_1, \ldots, v_n) = [v]_{\mathcal{B}}$ e $(w_1, \ldots, w_n) = [w]_{\mathcal{B}}$.

Solução do Exercício 1. Uma possível base para o complemento ortogonal de $[1 - x^2, x^3]$ é $\{6 - 8x + 3x^2, 3 - 5x + x^3\}$.

Solução do Exercício 2. Uma possível base ortonormal para V é:

$$\Big\{\tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1,0), \tfrac{1}{\sqrt{6}}(0,1,0,-1,2), \tfrac{1}{\sqrt{120}}(-9,1,6,-1,-1)\Big\}.$$

Solução do Exercício 3. Considere o espaço vetorial $C\big([-\pi,\pi]\big)$ das funções contínuas $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ munido do produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in C\big([-\pi,\pi]\big).$$

Seja V o subespaço de $C\big([-\pi,\pi]\big)$ gerado pelas funções 1, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Os valores procurados de a, b e c são aqueles tais que $a + b\operatorname{sen} x + c\cos x$ é a projeção ortogonal de x^2 em V. Como $\{1, \operatorname{sen} x, \cos x\}$ é uma base ortogonal de V, temos que a, b e c são dados por:

$$a = \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{\pi^2}{3}, \quad b = \frac{\langle x^2, \operatorname{sen} x\rangle}{\langle \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} x\rangle} = 0, \quad c = \frac{\langle x^2, \cos x\rangle}{\langle \cos x, \cos x\rangle} = -4.$$

Solução do Exercício 4. Verifiquemos as propriedades de produto interno. Temos:

$$\begin{aligned}\langle A_1 + A_2, B\rangle &= \operatorname{tr}\big((A_1 + A_2)B^{\mathrm{t}}\big) = \operatorname{tr}(A_1B^{\mathrm{t}} + A_2B^{\mathrm{t}})\\ &= \operatorname{tr}(A_1B^{\mathrm{t}}) + \operatorname{tr}(A_2B^{\mathrm{t}}) = \langle A_1, B\rangle + \langle A_2, B\rangle,\end{aligned}$$

para quaisquer $A_1, A_2, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Também:

$$\langle \lambda A, B\rangle = \operatorname{tr}\big((\lambda A)B^{\mathrm{t}}\big) = \operatorname{tr}\big(\lambda(AB^{\mathrm{t}})\big) = \lambda\operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}) = \lambda\langle A, B\rangle,$$

para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Além do mais:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}) = \operatorname{tr}\big((BA^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}\big) = \operatorname{tr}(BA^{\mathrm{t}}) = \langle B, A\rangle,$$

para quaisquer $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Finalmente note que, dadas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, vale que:

$$(AB^{\mathrm{t}})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

donde:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{t}}) = \sum_{i=1}^{m}(AB^{\mathrm{t}})_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

Assim:

$$\langle A, A\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2 > 0,$$

se $A \neq 0$.

Solução do Exercício 5. Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = 0.$$

Para todo $i = 1, \dots, n$, temos:

$$0 = \langle a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n, u_i \rangle = a_1 \langle u_1, u_i \rangle + \cdots + a_n \langle u_n, u_i \rangle = a_i \langle u_i, u_i \rangle.$$

Como $u_i \neq 0$, temos $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ e portanto $a_i = 0$.

Solução do Exercício 6. Por definição, temos:

$$v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n.$$

Daí:

$$\langle v, e_i \rangle = \langle v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n, e_i \rangle = v_1 \langle e_1, e_i \rangle + \cdots + v_n \langle e_n, e_i \rangle = v_i \langle e_i, e_i \rangle.$$

Assim:

$$v_i = \frac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}.$$

Solução do Exercício 7. Por definição, temos:

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i, \quad w = \sum_{j=1}^n w_j e_j.$$

Daí:

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^n w_j e_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i w_j \langle e_i, e_j \rangle &= \sum_{i=1}^n v_i w_i \langle e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n v_i w_i. \end{aligned}$$