Sexta Lista

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

30/09/2018

Exercício 1. Sejam dados $a, b > 0$ com $a \geq b$ e considere a elipse de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se (x, y) denota um ponto dessa elipse, mostre que a curvatura da elipse nesse ponto é dada por

$$\frac{ab}{(a^2 - e^2x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

em que $e = \frac{c}{a}$ denota a excentricidade da elipse e $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ denota a semi-distância focal.

Exercício 2. Para cada $t \in \mathbb{R}$, o *cosseno hiperbólico* e o *seno hiperbólico* de t são definidos respectivamente por:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot$$

(a) Verifique que a derivada de senh é cosh e que a derivada de cosh é senh.

(b) Verifique que vale a identidade

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Sejam dados $a, b > 0$. Usando a identidade mostrada no item (b), obtenha uma parametrização para o ramo da hipérbole de equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que fica no semi-plano $x > 0$.

(d) Se (x, y) denota um ponto dessa hipérbole, mostre que a curvatura da hipérbole nesse ponto é dada por

$$\frac{ab}{(e^2x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

em que $e = \frac{c}{a}$ denota a excentricidade da hipérbole e $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ denota a semi-distância focal.

Exercício* 3 (velocidade angular vetorial de um referencial móvel)**.** Sejam $e_1 : I \to \mathbb{R}^3$, $e_2 : I \to \mathbb{R}^3$ e $e_3 : I \to \mathbb{R}^3$ curvas parametrizadas deriváveis definidas num intervalo I. Suponha que para todo $t \in I$ tenhamos que

$$\mathcal{B}_t = \{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$$

seja uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, isto é, $e_i(t) \cdot e_j(t) = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, 2, 3$, em que $\delta_{ij} = 1$, se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Dizemos então que $\mathcal{B}$ é um *referencial móvel ortonormal* ou apenas *referencial móvel*. Para cada $j = 1, 2, 3$, denote por $\big(a_{1j}(t), a_{2j}(t), a_{3j}(t)\big)$ as coordenadas da derivada $e_j'(t)$ na base $\mathcal{B}_t$, isto é:

$$e_j'(t) = a_{1j}(t)e_1(t) + a_{2j}(t)e_2(t) + a_{3j}(t)e_3(t).$$

(a) Mostre que

$$a_{ij}(t) = e_i(t) \cdot e_j'(t),$$

para todo $t \in I$ e todos $i, j = 1, 2, 3$.

(b) Mostre que a matriz $\big(a_{ij}(t)\big)_{3\times 3}$ é anti-simétrica, isto é,

$$a_{ij}(t) = -a_{ji}(t),$$

para todo $t \in I$ e todos $i, j = 1, 2, 3$.

(c) Em vista do resultado do item (b), para cada $t \in I$ podemos escrever a matriz $\big(a_{ij}(t)\big)_{3\times 3}$ na forma:

$$\big(a_{ij}(t)\big)_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Supondo que a base $\mathcal{B}_t$ seja positivamente orientada[1], definimos o vetor $\vec{\omega}(t)$ por:

$$\vec{\omega}(t) = \omega_1(t)e_1(t) + \omega_2(t)e_2(t) + \omega_3(t)e_3(t).$$

Mostre que:

$$e_i'(t) = \vec{\omega}(t) \wedge e_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

O vetor $\vec{\omega}(t)$ é chamado a *velocidade angular vetorial* do referencial móvel $\mathcal{B}$ no instante t.

[1]Se não for, devemos definir $\vec{\omega}(t) = -\big(\omega_1(t)e_1(t) + \omega_2(t)e_2(t) + \omega_3(t)e_3(t)\big)$, de modo a manter a validade da fórmula (1).

Segue do resultado do Exercício 5 da quinta lista que um referencial que gira em torno do eixo z com velocidade angular escalar constante ω, no sentido do eixo x para o eixo y, possui velocidade angular vetorial igual a ω vezes o vetor unitário que tem a direção e o sentido do eixo z. Obviamente, um resultado análogo vale para um eixo de rotação arbitrário. Portanto, se $\vec{\omega}(t_0)$ é a velocidade angular vetorial de um referencial móvel $\mathcal{B}_t = \{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ no instante t_0 então, para t próximo de t_0, o comportamento desse referencial móvel é parecido com o de um referencial $\mathcal{C}_t = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$ que gira com velocidade angular escalar constante igual a $\|\vec{\omega}(t_0)\|$ em torno do eixo com a direção de $\vec{\omega}(t_0)$. (O sentido da rotação corresponde ao sentido do vetor $\vec{\omega}(t_0)$ da maneira usual, de acordo com a correspondência determinada pela orientação escolhida no espaço[2].) De fato, escolhendo $\mathcal{C}$ com $\mathcal{C}_{t_0} = \mathcal{B}_{t_0}$, segue da fórmula (1) e do fato que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tem a mesma velocidade angular vetorial no instante t_0 que $e_i'(t_0) = f_i'(t_0)$, para $i = 1, 2, 3$. Assim, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tem comportamento parecido perto de $t = t_0$ no sentido de que ambos possuem o mesmo polinômio de Taylor de primeira ordem em $t = t_0$.

[2]Explicitamente, essa correspondência é a seguinte: se $\{e_1, e_2, e_3\}$ for uma base ortonormal positiva, então o sentido de rotação de e_1 para e_2 pelo arco mais curto corresponde ao sentido do vetor e_3.