Sexta Lista

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk

04/05/2013

Exercício 1. Esboce os gráficos das funções definidas nos itens abaixo, levando em conta: domínio, crescimento/decrescimento, concavidade, limites que forem importantes para esboçar o gráfico (isto é, limites quando $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, se fizerem sentido, e limites em "extremidades" do domínio[1]) e interseções do gráfico com os eixos coordenados. Determine os pontos de máximo e mínimo locais e globais das funções, indicando se são estritos ou não.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 8}{x + 2}$, definida onde a fórmula fizer sentido.

(c) $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^x$, para todo $x > 0$.

Exercício 2. Seja $k \in \mathbb{R}$. É fácil ver que (verifique!), para todo $c \in \mathbb{R}$, a função:

$$f(x) = ce^{kx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

satisfaz:

$$f'(x) = kf(x), \tag{1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que, reciprocamente, se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável num intervalo I satisfazendo (1) para todo $x \in I$ então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ce^{kx}$, para todo $x \in I$. (Sugestão: calcule $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)e^{-kx}]$.) A igualdade (1) é um exemplo de uma *equação diferencial*, isto é, uma equação envolvendo derivadas, na qual a incógnita a ser determinada é uma função.

Exercício 3. Mostre que:

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2},$$

para todo $x \geq 0$. (Sugestão: considere a função $f(x) = \cos x - \big(1 - \frac{x^2}{2}\big)$.)

Exercício 4. Determine o número de raízes reais do polinômio:

$$p(x) = 2x^7 + 4x^5 + 2x^3 + 3x + 1.$$

Justifique a sua resposta.

[1] Mais precisamente, em pontos de acumulação do domínio que não estejam no domínio.

Exercício 5. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a reta que é gráfico da função $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $r(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, com $D \subset \mathbb{R}$. Dizemos que o gráfico de r é uma *assíntota* ao gráfico de f em $+\infty$ se (D for ilimitado à direita e):

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - r(x)\big) = 0.$$

De modo análogo, define-se assíntotas em $-\infty$.

(a) Mostre que se o gráfico de r é uma assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ então:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - ax\big).$$

(b) Determine as assíntotas em $+\infty$ e em $-\infty$ ao gráfico da função f definida no item (b) do Exercício 1.

Exercício 6. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$, é dita *Lipschitziana* se existe $k \geq 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$, para quaisquer $x_1, x_2 \in D$; uma número k com essa propriedade é chamado uma *constante de Lipschitz* para a função f.

(a) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo I, derivável no interior de I. Mostre que se a derivada de f é uma função limitada então f é Lipschitziana: mais precisamente, mostre que se $k \geq 0$ é tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo x no interior de I, então k é uma constante de Lipschitz para f.

(b) Mostre que $|\operatorname{sen} x_1 - \operatorname{sen} x_2| \leq |x_1 - x_2|$, para todos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Exercício* 7 (equação diferencial do oscilador harmônico simples)**.** Dado um número real $k \neq 0$, é fácil verificar que (verifique!), para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \operatorname{sen}(kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

satisfaz:

$$f''(x) = -k^2 f(x), \tag{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. O objetivo deste exercício é demonstrar a recíproca. Considere então uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, duas vezes derivável e satisfazendo (2), para todo $x \in I$.

(a) Mostre que existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned} \cos(kx) f(x) - \tfrac{1}{k} \operatorname{sen}(kx) f'(x) &= c_1, \\ \operatorname{sen}(kx) f(x) + \tfrac{1}{k} \cos(kx) f'(x) &= c_2, \end{aligned}$$

para todo $x \in I$.

(b) Conclua que $f(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \operatorname{sen}(kx)$, para todo $x \in I$.

Exercício* 8. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e seja $a \in I$. Suponha que f seja derivável em todo ponto de $I \setminus \{a\}$ e que $\lim_{x \to a} f'(x)$ exista e seja igual a um número real L. Mostre que f é derivável no ponto a e que $f'(a) = L$. (Sugestão: use o Teorema do Valor Médio.)