Quinta Lista

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk

12/05/2018

Exercício 1 (associatividade do produto de espaços mensuráveis)**.** Seja $\big((X_i,\mathcal{A}_i)\big)_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis e seja $I=\bigcup_{j\in J} I_j$ uma partição do conjunto I. Considere a aplicação bijetora

$$\phi:\prod_{i\in I} X_i \ni (x_i)_{i\in I} \longmapsto \big((x_i)_{i\in I_j}\big)_{j\in J} \in \prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j} X_i$$

que é normalmente usada para identificar o produto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ com o produto cartesiano agrupado $\prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j} X_i$. Assuma que $\prod_{i\in I} X_i$ esteja munido da σ-álgebra produto $\bigotimes_{i\in I}\mathcal{A}_i$ (veja item (d) do Exercício 2 da quarta lista) e que $\prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j} X_i$ esteja munido da σ-álgebra produto $\bigotimes_{j\in J}\mathcal{B}_j$ das σ-álgebras produto $\mathcal{B}_j=\bigotimes_{i\in I_j}\mathcal{A}_i$. Mostre que ϕ é um *isomorfismo de espaços mensuráveis*, i.e., que ϕ e ϕ^{-1} são aplicações mensuráveis. (Sugestão: uma função a valores num produto é mensurável se, e somente se, todas as suas coordenadas forem mensuráveis.)

Exercício 2. Seja $(X,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida e seja $f:X\to[0,+\infty]$ uma função mensurável. Considere a medida $\nu_f:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ definida por

$$\nu_f(A)=\int_A f\,\mathrm{d}\mu,$$

para todo $A\in\mathcal{A}$.

(a) Mostre que $\int_X g\,\mathrm{d}\nu_f=\int_X gf\,\mathrm{d}\mu$, se $g:X\to[0,+\infty]$ for uma função simples e mensurável.

(b) Mostre que $\int_X g\,\mathrm{d}\nu_f=\int_X gf\,\mathrm{d}\mu$, se $g:X\to[0,+\infty]$ for uma função mensurável.

(c) Seja $g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Mostre que g será quase integrável com respeito a ν_f se, e somente se, gf for quase integrável com respeito a μ. Mostre também que, quando g for quase integrável com respeito a ν_f, teremos que $\int_X g\,\mathrm{d}\nu_f=\int_X gf\,\mathrm{d}\mu$.

(d) Descreva concretamente a medida ν_f se f for a função característica de um conjunto $C\in\mathcal{A}$.

Exercício 3. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $(Y, \mathcal{B})$ um espaço mensurável e $\phi : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ uma função mensurável. O *push-forward* da medida μ pela aplicação mensurável ϕ é a medida $\nu = \phi_* \mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ definida por

$$\nu(B) = \mu\big(\phi^{-1}[B]\big),$$

para todo $B \in \mathcal{B}$. (Note que essa medida nada mais é que a medida $\mu \circ \phi^*|_{\mathcal{B}}$ considerada no item (d) do Exercício 7 da primeira lista.) Quando o espaço mensurável $(Y, \mathcal{B})$ está munido da medida $\nu = \phi_* \mu$, dizemos também que a função $\phi : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (Y, \mathcal{B}, \nu)$ *preserva medida.* Nos itens a seguir, assumimos que $\nu = \phi_* \mu$.

(a) Mostre que $\int_Y f \,\mathrm{d}\nu = \int_X f \circ \phi \,\mathrm{d}\mu$, se $f : Y \to [0, +\infty]$ for uma função simples e mensurável.

(b) Mostre que $\int_Y f \,\mathrm{d}\nu = \int_X f \circ \phi \,\mathrm{d}\mu$, se $f : Y \to [0, +\infty]$ for uma função mensurável.

(c) Seja $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável. Mostre que f será quase integrável com respeito a ν se, e somente se, $f \circ \phi$ for quase integrável com respeito a μ. Mostre também que, quando f for quase integrável com respeito a ν, teremos que $\int_Y f \,\mathrm{d}\nu = \int_X f \circ \phi \,\mathrm{d}\mu$.

(d) Se $X = Y$, $\mathcal{A}$ contém $\mathcal{B}$ e ϕ é a aplicação identidade, quem é ν? O que o resultado do item (c) está dizendo nesse caso?

Exercício 4. Recorde que se $(a_i)_{i \in I}$ é uma família em $[0, +\infty]$, então nós definimos a soma $\sum_{i \in I} a_i$ como sendo o supremo de todas as somas $\sum_{i \in F} a_i$, em que F percorre os subconjuntos finitos de I. Mostre que, se a soma $\sum_{i \in I} a_i$ for finita, então o conjunto $\big\{i \in I : a_i \neq 0\big\}$ será enumerável. (Sugestão: olhe para o conjunto $\big\{i \in I : a_i \geq \varepsilon\big\}$, em que $\varepsilon > 0$.)

Exercício 5. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ uma função integrável. Mostre que o conjunto

$$\big\{x \in X : |f(x)| = +\infty\big\}$$

tem medida nula e que o conjunto

$$\big\{x \in X : f(x) \neq 0\big\}$$

é σ-finito, i.e., ele está contido numa união enumerável de conjuntos de medida finita.

Exercício 6. Sejam X um conjunto e $\mu : \wp(X) \to [0, +\infty]$ a medida de contagem, i.e., $\mu(A)$ é igual ao número de elementos de A, para todo $A \subset X$.

(a) Dada uma função $f : X \to [0, +\infty]$, mostre que:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{x \in X} f(x).$$

(Sugestão: trate primeiro o caso em que $\big\{x \in X : f(x) \neq 0\big\}$ é enumerável. No outro caso, use o resultado do Exercício 4.)

(b) Dada uma função $p : X \to [0, +\infty]$, considere a medida de contagem com pesos $\nu_p : \wp(X) \to [0, +\infty]$ definida por $\nu_p(A) = \sum_{x \in A} p(x)$, para todo $A \subset X$. Mostre que

$$\int_X f \, \mathrm{d}\nu_p = \sum_{x \in X} f(x)p(x),$$

para toda função $f : X \to [0, +\infty]$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 2.)

Exercício 7. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $k \in [0, +\infty]$. Defina $k\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ fazendo

$$(k\mu)(A) = k\big(\mu(A)\big),$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

(a) Mostre que $k\mu$ é uma medida.

(b) Se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável, mostre que:

$$\int_X f \, \mathrm{d}(k\mu) = k \int_X f \, \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

(c) Se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ for quase integrável com respeito a μ e se k for finito, mostre que f será quase integrável com respeito a $k\mu$ e que a igualdade (1) vale. Reciprocamente, se f for quase integrável com respeito a $k\mu$ e se k for positivo, mostre que f será quase integrável com respeito a μ e que a igualdade (1) vale.

Exercício 8. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ e $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ medidas tais que $\nu(A) \leq \mu(A)$, para todo $A \in \mathcal{A}$.

(a) Mostre que se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável, então $\int_X f \, \mathrm{d}\nu \leq \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.

(b) Mostre que se $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ for quase integrável (resp., integrável) com respeito a μ, então f será quase integrável (resp., integrável) com respeito a ν.

Exercício 9. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $(\mu_i)_{i \in I}$ uma família de medidas $\mu_i : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$. Defina $\mu = \sum_{i \in I} \mu_i : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ fazendo

$$\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu_i(A),$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

(a) Mostre que μ é uma medida.

(b) Se $f : X \to [0, +\infty]$ é uma função mensurável, mostre que:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i \in I} \int_X f \, \mathrm{d}\mu_i.$$

(Sugestão: será útil usar o resultado do item (a) do Exercício 6 e o Teorema da Convergência Monotônica para integrais com respeito à medida de contagem no conjunto I.)