Quinta Lista

MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk
13/04/2014

Definição 1. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e sejam V_i, $i = 1, \dots, n$, subespaços de V. Dizemos que a soma $\sum_{i=1}^n V_i$ é *direta* e escrevemos $\sum_{i=1}^n V_i = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ quando, para toda seqüência $(x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n V_i$, se $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, então $x_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Como vimos em aula, se $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$, então todo vetor $x \in V$ se escreve de modo único na forma $x = \sum_{i=1}^n x_i$, com $(x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n V_i$. As aplicações

$$P_i : V \longrightarrow V_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

definidas por $P_i(x) = x_i$, onde $(x_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n V_i$ e $x = \sum_{i=1}^n x_i$, são lineares e são chamadas as *projeções* associadas à decomposição em soma direta $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$.

Exercício 1. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K.

(a) Seja $V = V_1 \oplus V_2$ uma decomposição em soma direta e sejam

$$P_i : V \longrightarrow V_i, \quad i = 1, 2,$$

as correspondentes projeções. Altere o contra-domínio das projeções P_i de modo que elas se tornem operadores de V em V. Mostre que $(P_i)^2 = P_i$, $i = 1, 2$ e $P_1 + P_2 = \mathrm{Id}_V$.

(b) Seja $P : V \to V$ um operador linear tal que $P^2 = P$. Mostre que $V = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P)$ é uma decomposição em soma direta cujas projeções correspondentes são:

$$P : V \longrightarrow \mathrm{Im}(P), \quad (\mathrm{Id}_V - P) : V \longrightarrow \mathrm{Ker}(P).$$

Exercício 2. Sejam V_i, $i = 1, \dots, n$, espaços vetoriais sobre um corpo K e considere o produto cartesiano $V = \prod_{i=1}^n V_i$ munido das operações:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

para todos $x_i, y_i \in V_i$, $i = 1, \dots, n$, e todo $\lambda \in K$. Para $i = 1, \dots, n$, seja $\kappa_i : V_i \to V$ a transformação linear injetora tal que $\kappa_i(x)$ possui a i-ésima coordenada igual a x e todas as outras coordenadas nulas, para todo $x \in V_i$. Mostre que $V = \bigoplus_{i=1}^n \kappa_i[V_i]$.

Exercício 3. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K.

(a) Sejam $\mathcal{B} \subset V$ uma base de V e $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ um partição de $\mathcal{B}$, isto é, $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$, para $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$. Se V_i é o subespaço gerado por $\mathcal{B}_i$, mostre que $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$.

(b) Seja $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ uma decomposição em soma direta de V e, para cada $i = 1, \ldots, n$, seja $\mathcal{B}_i \subset V_i$ uma base de V_i. Mostre que:

$$\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset, \quad i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j,$$

e que $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$ é uma base de V.

Exercício 4. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e seja $V = \bigoplus_{j=1}^n V_j$ uma decomposição em soma direta de V.

(a) Para cada $j = 1, \ldots, n$, seja $T_j : V_j \to W$ uma aplicação linear. Mostre que existe uma única aplicação linear $T : V \to W$ tal que $T|_{V_j} = T_j$, para $j = 1, \ldots, n$.

(b) Suponha que V e W tenham dimensão finita. Para cada $j = 1, \ldots, n$, seja $\mathcal{B}_j$ uma base ordenada de V_j e seja $\mathcal{B}$ a base ordenada de V obtida concatenando[1] as bases $\mathcal{B}_j$. Seja $\mathcal{C}$ uma base ordenada de W. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $T_j = T|_{V_j}$, mostre que a matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ é obtida justapondo as matrizes $[T_j]_{\mathcal{B}_j\mathcal{C}}$ lado a lado, como indicado abaixo:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \Big([T_1]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}} \ \cdots \ [T_n]_{\mathcal{B}_n\mathcal{C}} \Big).$$

Exercício 5. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e seja $W = \bigoplus_{i=1}^m W_i$ uma decomposição em soma direta de W. Denote por

$$P_i : W \longrightarrow W_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

as correspondentes projeções.

(a) Para cada $i = 1, \ldots, m$, seja $T_i : V \to W_i$ uma transformação linear. Mostre que existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $P_i \circ T = T_i$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

(b) Suponha que V e W tenham dimensão finita. Para cada $i = 1, \ldots, m$, seja $\mathcal{C}_i$ uma base ordenada de W_i e seja $\mathcal{C}$ a base ordenada de W obtida concatenando as bases $\mathcal{C}_i$. Seja $\mathcal{B}$ uma base ordenada de V. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $T_i = P_i \circ T$, mostre que a matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ é obtida justapondo as matrizes $[T_i]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_i}$ uma embaixo da outra, como indicado abaixo:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_1} \\ \vdots \\ [T_m]_{\mathcal{B}\mathcal{C}_m} \end{pmatrix}.$$

---

[1] Mais precisamente: se a base $\mathcal{B}_j$ é $(e_1^j, \ldots, e_{k_j}^j)$, para $j = 1, \ldots, n$, então a base $\mathcal{B}$ é $(e_1^1, \ldots, e_{k_1}^1, \ldots, e_1^n, \ldots, e_{k_n}^n)$.

O resultado do exercício a seguir pode ser obtido como corolário dos resultados dos Exercícios 4 e 5.

Exercício 6. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e sejam $V = \bigoplus_{j=1}^{n} V_j$, $W = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$ decomposições em soma direta para V e W, respectivamente. Denote por $P_i : W \to W_i$ as projeções correspondentes à decomposição de W.

(a) Dadas transformações lineares

$$T_{ij} : V_j \longrightarrow W_i, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n,$$

mostre que existe uma única transformação linear $T : V \to W$ tal que $T_{ij} = P_i \circ T|_{V_j}$, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

(b) Suponha que V e W tenham dimensão finita. Para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, sejam $\mathcal{B}_j$ uma base ordenada de V_j e $\mathcal{C}_i$ uma base ordenada de W_i. Sejam $\mathcal{B}$ a base ordenada de V obtida concatenando as bases $\mathcal{B}_j$ e $\mathcal{C}$ a base ordenada de W obtida concatenando as bases $\mathcal{C}_i$. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e $T_{ij} = P_i \circ T|_{V_j}$, mostre que a matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ é a matriz formada pelos blocos $[T_{ij}]_{\mathcal{B}_j\mathcal{C}_i}$, como indicado abaixo:

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} [T_{11}]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1} & \cdots & [T_{1n}]_{\mathcal{B}_n\mathcal{C}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [T_{m1}]_{\mathcal{B}_1\mathcal{C}_m} & \cdots & [T_{mn}]_{\mathcal{B}_n\mathcal{C}_m} \end{pmatrix}.$$

Exercício 7. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e sejam $V = \bigoplus_{j=1}^{n} V_j$, $W = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$ decomposições em soma direta para V e W, respectivamente. Denote por $P_i : W \to W_i$ as projeções correspondentes à decomposição de W e por $Q_j : V \to V_j$ as projeções correspondentes à decomposição de V. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e seja $T_{ij} = P_i \circ T|_{V_j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Dado $x \in V$, mostre que:

$$P_i\big(T(x)\big) = \sum_{j=1}^{n} T_{ij}\big(Q_j(x)\big), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Exercício 8. Sejam V, W e Z espaços vetoriais sobre um corpo K e sejam $V = \bigoplus_{j=1}^{n} V_j$, $W = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$ e $Z = \bigoplus_{k=1}^{p} Z_k$ decomposições em soma direta. Denote por $P_i : W \to W_i$ as projeções correspondentes à decomposição de W, por $Q_j : V \to V_j$ as projeções correspondentes à decomposição de V e por $R_k : Z \to Z_k$ as projeções correspondentes à decomposição de Z. Sejam $T : V \to W$, $S : W \to Z$ aplicações lineares e seja $U = S \circ T$. Para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, p$, escreva $T_{ij} = P_i \circ T|_{V_j}$, $S_{ki} = R_k \circ S|_{W_i}$ e $U_{kj} = R_k \circ U|_{V_j}$. Mostre que:

$$U_{kj} = \sum_{i=1}^{m} (S_{ki} \circ T_{ij}), \quad j = 1, \ldots, n, \ k = 1, \ldots, p.$$