Quinta Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk
23/03/2019

Exercício 1. Considere a função $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z, t) = \frac{\cos(xt)}{1 + \cos^2(t + yz)},$$

para todo $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

(a) Use o Teorema da Função Implícita para concluir que existem um aberto U em $\mathbb{R}^3$ contendo $\left(\frac{\pi}{2}, 1, -1\right)$, um aberto V em $\mathbb{R}$ contendo 1 e uma função $f : U \to V$ de classe C^∞ tais que

$$F(x, y, z, t) = 0 \Longleftrightarrow t = f(x, y, z),$$

para todo $(x, y, z) \in U$ e todo $t \in V$.

(b) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, 1, -1\right)$.

Exercício 2. Considere a função $F : U \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z) = y + \ln(xy + z),$$

para todo $(x, y, z) \in U$, em que U é o subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$ definido por $U = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z > 0\big\}$.

(a) Use o Teorema da Função Implícita para concluir que existem um aberto V em $\mathbb{R}^2$ contendo $(1, 0)$, um aberto W em $\mathbb{R}$ contendo 1 e uma função $f : V \to W$ de classe C^∞ tais que para todo $(x, z) \in V$ e todo $y \in W$ vale que $(x, y, z) \in U$ e:

$$F(x, y, z) = 1 \Longleftrightarrow y = f(x, z).$$

(b) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(1, 0)$.

Exercício 3. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = x^3 + y^3,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Encontre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = f(x),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Observe que f é de classe C^∞.

(b) Quanto vale $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$?

(c) O que os resultados dos itens (a) e (b) dizem sobre o Teorema da Função Implícita?

Exercício 4. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z) = (xy^3 + yz, z^3 - xy^2 z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Use o Teorema da Função Implícita para concluir que existem um aberto U em $\mathbb{R}$ contendo 2, um aberto V em $\mathbb{R}^2$ contendo $(1, 1)$ e uma função $f : U \to V$ de classe C^∞ tais que

$$F(x, y, z) = (3, -1) \Longleftrightarrow (y, z) = f(x),$$

para todo $x \in U$ e todo $(y, z) \in V$.

(b) Calcule $f'(2)$.

Exercício* 5 (método dos multiplicadores de Lagrange)**.** Sejam $F : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k (com $k \geq 1$) definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^3$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ um ponto de U, $c = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e

$$S = \big\{(x, y, z) \in U : F(x, y, z) = c\big\}$$

a superfície de nível c de F. Suponha que o gradiente de F no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ seja não nulo.

(a) Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ortogonal ao gradiente $\nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, mostre que existe uma curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ de classe C^k, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto contendo 0, tal que a imagem de γ esteja contida em S, $\gamma(0) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $\gamma'(0) = \vec{v}$.

(b) Seja $g : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tal que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ seja um ponto de máximo ou mínimo local da restrição $g|_S$. Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \lambda \nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Exercício 6** (método dos multiplicadores de Lagrange, caso geral)**.** Sejam $F : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k (com $k \geq 1$) definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^m$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ um ponto de U, $c = F(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ e:

$$S = \big\{x \in U : F(x) = c\big\}.$$

Denote por $F_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, as funções coordenadas de F e suponha que os gradientes $\nabla F_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, n$, sejam linearmente independentes.

(a) Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ ortogonal a todos os gradientes $\nabla F_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, n$, mostre que existe uma curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto contendo 0, tal que a imagem de γ esteja contida em S, $\gamma(0) = \bar{x}$ e $\gamma'(0) = \vec{v}$.

(b) Seja $g : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $\bar{x}$ tal que $\bar{x}$ seja um ponto de máximo ou mínimo local da restrição $g|_S$. Mostre que existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\nabla g(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla F_1(\bar{x}) + \cdots + \lambda_n \nabla F_n(\bar{x}).$$

Sugestões

Exercício 5. (a) Alguma das coordenadas do gradiente de F no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é não nula, isto é, alguma das derivadas parciais de F nesse ponto é não nula. Digamos que $\frac{\partial F}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0$ (se for outra derivada parcial de F nesse ponto que é não nula, você pode permutar a ordem das variáveis de F e recair no caso em que é $\frac{\partial F}{\partial z}$ a derivada parcial não nula). Pelo Teorema da Função Implícita, existem um aberto V em $\mathbb{R}^2$ contendo $(\bar{x}, \bar{y})$, um aberto W em $\mathbb{R}$ contendo $\bar{z}$ e uma função $f : V \to W$ de classe C^k tais que $V \times W \subset U$ e

$$F(x, y, z) = c \Longleftrightarrow z = f(x, y),$$

para todo $(x, y) \in V$ e todo $z \in W$. Defina

$$\gamma(t) = \big(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2, f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2)\big),$$

para todo t num intervalo aberto I contendo 0 suficientemente pequeno de modo que $(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) \in V$, para todo $t \in I$. Aqui $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

(b) Se $\vec{v}$ é um vetor qualquer ortogonal a $\nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, tome uma curva γ como no item (a). Note que $g \circ \gamma$ possui um máximo ou mínimo local em zero e conclua que $(g \circ \gamma)'(0) = 0$. Calcule $(g \circ \gamma)'(0)$ usando a regra da cadeia.

Exercício 6. A solução deste exercício depende de alguns conhecimentos de Álgebra Linear.

(a) Os gradientes das funções coordenadas de F são precisamente as linhas da matriz Jacobiana de F. Assim, nossas hipóteses dizem que as linhas da matriz $JF(\bar{x})$ são linearmente independentes. Isso implica que essa matriz tem posto n e portanto que ela possui uma submatriz $n \times n$ que é inversível. Permutando as variáveis de F se necessário, você pode supor que a matriz formada pelas últimas n colunas de $JF(\bar{x})$ é inversível. Segue então do Teorema da Função Implícita que existem um aberto V em $\mathbb{R}^{m-n}$ contendo $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{m-n})$, um aberto W em $\mathbb{R}^n$ contendo $(\bar{x}_{m-n+1}, \ldots, \bar{x}_m)$ e uma função $f : V \to W$ de classe C^k tais que $V \times W \subset U$ e

$$F(x_1, \ldots, x_m) = c \Longleftrightarrow (x_{m-n+1}, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_{m-n})$$

para todo $(x_1, \ldots, x_{m-n}) \in V$ e todo $(x_{m-n+1}, \ldots, x_m) \in W$. Defina

$$\gamma(t) = \big(\bar{x}_1 + tv_1, \ldots, \bar{x}_{m-n} + tv_{m-n}, f(\bar{x}_1 + tv_1, \ldots, \bar{x}_{m-n} + tv_{m-n})\big),$$

para todo t num intervalo aberto I contendo 0 suficientemente pequeno.

(b) Se $\vec{v}$ é um vetor qualquer ortogonal a $\nabla F_i(\bar{x})$ para todo $i = 1, \ldots, n$, tome uma curva γ como no item (a). Note que $g \circ \gamma$ possui um máximo ou mínimo local em zero e conclua que $(g \circ \gamma)'(0) = 0$.

Respostas

Exercício 1.

(a) Basta verificar que $F\big(\frac{\pi}{2},1,-1,1\big)=0$ e que a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial t}$ no ponto $\big(\frac{\pi}{2},1,-1,1\big)$ não é nula. A conclusão seguirá então do fato que F é de classe C^∞ e do Teorema da Função Implícita. O valor dessa derivada parcial é

$$\frac{\partial F}{\partial t}\Big(\frac{\pi}{2},1,-1,1\Big)=-\frac{\pi}{4}\,,$$

que é de fato não nulo.

(b) As derivadas parciais de f no ponto $\big(\frac{\pi}{2},1,-1\big)$ são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big(\frac{\pi}{2},1,-1\Big)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\big(\frac{\pi}{2},1,-1,1\big)}{\frac{\partial F}{\partial t}\big(\frac{\pi}{2},1,-1,1\big)}=-\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\pi}{4}}=-\frac{2}{\pi}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big(\frac{\pi}{2},1,-1\Big)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\big(\frac{\pi}{2},1,-1,1\big)}{\frac{\partial F}{\partial t}\big(\frac{\pi}{2},1,-1,1\big)}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\Big(\frac{\pi}{2},1,-1\Big)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}\big(\frac{\pi}{2},1,-1,1\big)}{\frac{\partial F}{\partial t}\big(\frac{\pi}{2},1,-1,1\big)}=0.$$

Exercício 2.

(a) Basta verificar que $F(1,1,0)=1$ e que a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}$ no ponto $(1,1,0)$ não é nula. A conclusão seguirá então do fato que F é de classe C^∞ e do Teorema da Função Implícita. O valor dessa derivada parcial é

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,0)=2,$$

que é de fato não nulo.

(b) As derivadas parciais de f no ponto $(1,0)$ são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,0)}=-\frac{1}{2}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,0)}=-\frac{1}{2}\,.$$

Exercício 3.

(a) A função f é dada por $f(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) O Teorema da Função Implícita garante que se F é de classe C^∞ e se a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ é não nula num certo ponto (x_0, y_0) do domínio de F, então existe uma função f de classe C^∞ tal que a equação $F(x,y) = c$ é equivalente a $y = f(x)$, para (x,y) próximo a (x_0, y_0), em que $c = F(x_0, y_0)$. A *recíproca* dessa afirmação não é verdadeira em geral, como o exemplo que aparece neste exercício mostra: a igualdade $F(x,y) = 0$ é equivalente a $y = f(x)$, com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, mas ainda assim a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ é nula.

Exercício 4.

(a) Basta verificar que $F(2,1,1) = (3,-1)$ e que a matriz formada pelas duas últimas colunas da matriz Jacobiana de F no ponto $(2,1,1)$ é inversível. A conclusão seguirá então do fato que F é de classe C^∞ e do Teorema da Função Implícita. A matriz Jacobiana de F no ponto $(2,1,1)$ é

$$JF(2,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

a matriz formada pelas suas duas últimas colunas é

$$J_{y,z}F(2,1,1) = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

e seu determinante é igual a $11 \neq 0$. Assim, a matriz é de fato inversível.

(b) Se $J_x F(2,1,1)$ denota a primeira coluna da matriz Jacobiana de F no ponto $(2,1,1)$, então a matriz Jacobiana de f no ponto 2 é:

$$\begin{aligned} Jf(2) &= -\big(J_{y,z}(2,1,1)\big)^{-1} J_x(2,1,1) = -\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo $f'(2) = \big(-\frac{2}{11}, \frac{3}{11}\big)$.

Exercício 5. (a) A curva γ que descrevemos na sugestão é de classe C^k, tem imagem contida em S, satisfaz $\gamma(0) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e é tal que as duas primeiras coordenadas de $\gamma'(0)$ são v_1 e v_2. Resta só verificar que a terceira coordenada de $\gamma'(0)$ é v_3. Como $F \circ \gamma$ é constante, segue que

$$(F \circ \gamma)'(0) = \nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \gamma'(0) = 0.$$

Já que também $\nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \vec{v} = 0$, segue que:

$$\nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \big(\gamma'(0) - \vec{v}\big) = 0. \tag{1}$$

Como $\gamma'(0) - \vec{v}$ tem as duas primeiras coordenadas nulas e $\nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tem a terceira coordenada não nula, segue de (1) que a terceira coordenada de $\gamma'(0)$ é igual a v_3.

(b) Continuando o raciocínio que apresentamos na sugestão, temos:

$$(g \circ \gamma)'(0) = \nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \gamma'(0) = \nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot \vec{v} = 0.$$

Como $\vec{v}$ é um vetor arbitrário ortogonal a $\nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, vemos que $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é ortogonal a qualquer vetor $\vec{v}$ que seja ortogonal a $\nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Isso implica que $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $\nabla F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ são paralelos.

Exercício 6. (a) A curva γ que descrevemos na sugestão é de classe C^k, tem imagem contida em S, satisfaz $\gamma(0) = \bar{x}$ e é tal que as $m - n$ primeiras coordenadas de $\gamma'(0)$ coincidem com as $m - n$ primeiras coordenadas de $\vec{v}$. Como $F \circ \gamma$ é constante, temos:

$$(F \circ \gamma)'(0) = JF(\bar{x})\gamma'(0) = 0.$$

Do fato que $\vec{v}$ é ortogonal às linhas de $JF(\bar{x})$ (que são os gradientes das funções coordenadas de F no ponto $\bar{x}$), segue que $JF(\bar{x})\vec{v} = 0$ e portanto:

$$JF(\bar{x})\big(\gamma'(0) - \vec{v}\big) = 0. \tag{2}$$

Denote por $J_1F(\bar{x})$ a matriz contendo as primeiras $m - n$ colunas de $JF(\bar{x})$ e por $J_2F(\bar{x})$ a matriz contendo as últimas n colunas de $JF(\bar{x})$. Similarmente, denote por $[\gamma'(0) - \vec{v}]_1$ a matriz coluna contendo as primeiras $m - n$ coordenadas de $\gamma'(0) - \vec{v}$ e por $[\gamma'(0) - \vec{v}]_2$ a matriz coluna contendo as últimas n coordenadas de $\gamma'(0) - \vec{v}$. De (2) vem:

$$J_1F(\bar{x})[\gamma'(0) - \vec{v}]_1 + J_2F(\bar{x})[\gamma'(0) - \vec{v}]_2 = 0.$$

Como $[\gamma'(0) - \vec{v}]_1 = 0$ e $J_2F(\bar{x})$ é inversível, segue que $\gamma'(0) - \vec{v} = 0$.

(b) Continuando o raciocínio que apresentamos na sugestão, temos:

$$(g \circ \gamma)'(0) = \nabla g(\bar{x}) \cdot \gamma'(0) = \nabla g(\bar{x}) \cdot \vec{v} = 0.$$

Como $\vec{v}$ é um vetor arbitrário ortogonal a todos os $\nabla F_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, n$, vemos que $\nabla g(\bar{x})$ é ortogonal a qualquer vetor $\vec{v}$ que seja ortogonal ao subespaço gerado por $\nabla F_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, n$. Isso implica que $\nabla g(\bar{x})$ pertence a esse subespaço gerado, isto é, que $\nabla g(\bar{x})$ é uma combinação linear de $\nabla F_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, n$.