Quinta Lista

MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk
29/04/2012

Exercício 1. Mostre que se $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência convergente de números reais então:

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

(Sugestão: recorde que mostramos que o lim inf e o lim sup de uma seqüência são valores de aderência dessa seqüência.)

Exercício 2. Sejam $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ seqüências limitadas de números reais tais que $x_n \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Mostre que:

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq \liminf_{n\to+\infty} y_n, \quad \limsup_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup_{n\to+\infty} y_n.$$

Conclua que se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ então:

$$a \leq \liminf_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n \leq b.$$

Exercício 3. Sejam $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ seqüências limitadas de números reais. Mostre que:

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n + \liminf_{n\to+\infty} y_n \leq \liminf_{n\to+\infty} (x_n + y_n),$$
$$\limsup_{n\to+\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n + \limsup_{n\to+\infty} y_n.$$

Encontre um exemplo em que essas desigualdades sejam estritas.

Exercício 4. Seja $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência limitada de números reais e seja $c \in \mathbb{R}$. Mostre que se $c \geq 0$ então:

$$\liminf_{n\to+\infty} (cx_n) = c\big(\liminf_{n\to+\infty} x_n\big), \quad \limsup_{n\to+\infty} (cx_n) = c\big(\limsup_{n\to+\infty} x_n\big),$$

e que se $c \leq 0$ então:

$$\liminf_{n\to+\infty} (cx_n) = c\big(\limsup_{n\to+\infty} x_n\big), \quad \limsup_{n\to+\infty} (cx_n) = c\big(\liminf_{n\to+\infty} x_n\big).$$