Quinta Lista

MAT0122 – Álgebra Linear I

Prof. Daniel Victor Tausk
28/04/2014

Exercício 1. Verifique que a inversa de uma matriz invertível $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercício 2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear representada nas bases canônicas pela matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \big\{(1,1,1), (2,-1,0), (3,0,2)\big\}, \quad \mathcal{C} = \big\{(1,2), (3,1)\big\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determine a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$.

Exercício 3. Considere as bases:

$$\mathcal{B} = \big\{(2,1,2), (-1,1,2), (3,3,1)\big\}, \quad \mathcal{C} = \big\{(1,2,2), (1,2,3), (3,2,1)\big\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine uma base para o núcleo e uma base para a imagem de T. (Os vetores da sua resposta devem ser apresentados na base canônica.)

Exercício 4. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\mathrm{Ker}(T) = [(1,0,1,1), (-1,2,1,2)].$$

Exiba a matriz que representa T nas bases canônicas.

Exercício 5. Seja $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Quais são os possíveis valores para a dimensão de $\mathrm{Ker}(T)$?

Exercício 6. Considere a transformação linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A^{\mathrm{t}}$, para todo $A \in M_2(\mathbb{R})$. Considere a base $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$ definida por:

$$\mathcal{B} = \big\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big\}.$$

Determine uma base $\mathcal{C}$ de $M_2(\mathbb{R})$ tal que a matriz $[T]_{\mathcal{BC}}$ seja igual à matriz identidade.

Exercício 7. Sejam V e W espaços vetoriais e seja $T : V \to W$ uma transformação linear bijetora. Mostre que a transformação inversa

$$T^{-1} : W \longrightarrow V$$

também é linear.

Solução do Exercício 1. Basta calcular o produto de A pela matriz dada e observar que o resultado é a matriz identidade.

Solução do Exercício 2. $[T]_{\mathcal{BC}} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & 7 & 17 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Solução do Exercício 3. Uma possível base para $\operatorname{Ker}(T)$ é $\big\{(2,1,-3)\big\}$ e uma possível base para $\operatorname{Im}(T)$ é $\big\{(3,2,0),(1,1,1)\big\}$.

Solução do Exercício 4. Sejam:

$$u_1 = (1,0,1,1), \quad u_2 = (-1,2,1,2).$$

Escalonando a matriz cujas linhas são u_1 e u_2, vemos que o conjunto $\{u_1,u_2\}$ é linearmente independente e que um possível completamento desse conjunto a uma base $\mathcal{B} = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ é obtido definindo:

$$u_3 = (0,0,1,0), \quad u_4 = (0,0,0,1).$$

Se $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ é a transformação linear tal que $T(u_1) = 0$, $T(u_2) = 0$, $T(u_3) = (1,0)$ e $T(u_4) = (0,1)$, então $\operatorname{Ker}(T)$ é gerado por u_1 e u_2. De fato, obviamente $u_1, u_2 \in \operatorname{Ker}(T)$ e se $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 \in \operatorname{Ker}(T)$, então:

$$T(v) = \alpha_3 T(u_3) + \alpha_4 T(u_4) = 0,$$

donde $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_4 = 0$, já que $T(u_3)$ e $T(u_4)$ são linearmente independentes. Assim, $v \in [u_1,u_2]$, demonstrando que $\operatorname{Ker}(T)$ é gerado por u_1 e u_2. Se $\mathcal{C}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$, então:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denote por $\mathcal{C}'$ a base canônica de $\mathbb{R}^4$. A matriz $[T]_{\mathcal{C}'\mathcal{C}}$ que representa T nas bases canônicas é:

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{BC}}\big([I]_{\mathcal{BC}'}\big)^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solução do Exercício 5. Como $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$, os possíveis valores para a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$ são 0, 1 e 2. Usando a fórmula:

$$4 = \dim\big(\mathcal{P}_3(\mathbb{R})\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big),$$

vemos que $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big)$ só pode assumir os valores 2, 3 e 4. Vejamos que esses valores podem todos ser assumidos pela dimensão de $\mathrm{Ker}(T)$. A transformação linear $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (c, d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

é tal que $\mathrm{Ker}(T) = [1, x]$ e portanto seu núcleo tem dimensão 2. A transformação linear $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (0, d), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

é tal que $\mathrm{Ker}(T) = [1, x, x^2]$ e portanto seu núcleo tem dimensão 3. Finalmente, a transformação linear $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ que é identicamente nula possui núcleo igual a $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, que tem dimensão 4.

Solução do Exercício 6. $\mathcal{C} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

Solução do Exercício 7. Sejam $w_1, w_2 \in W$ e sejam

$$v_1 = T^{-1}(w_1), \quad v_2 = T^{-1}(w_2).$$

Temos $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$, de modo que:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2,$$

o que implica que:

$$T^{-1}(w_1 + w_2) = v_1 + v_2 = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2).$$

Agora, seja $w \in W$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $v = T^{-1}(w)$, então $T(v) = w$, de modo que:

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda w.$$

Assim:

$$T^{-1}(\lambda w) = \lambda v = \lambda\, T^{-1}(w).$$