Quinta Lista

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

23/09/2018

Exercício 1. Faça um esboço do desenho da imagem das curvas parametrizadas γ definidas nos itens a seguir.

(a) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^4 - 3t^2 + 2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(b) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2 + 2t + 1, 2t^2 + 4t + 3)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(c) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\cos(\operatorname{sen} t), \operatorname{sen}(\operatorname{sen} t)\big)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(d) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\cos(2t), \cos t\big)$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

(e) $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(\operatorname{sen}(2t), \cos t\big)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. Calcule o comprimento das curvas parametrizadas γ nos itens a seguir.

(a) $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t, t\big)$, para todo $t \in [0, T]$, em que $T > 0$ é dado;

(b) $\gamma : [1, T] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \big(3t^2 - 6t + 3, 2[(2t-1)^{\frac{3}{2}}]\big)$, para todo $t \in [1, T]$, em que $T > 1$ é dado.

Exercício 3 (comprimento em coordenadas polares)**.** Sejam $\rho : I \to \mathbb{R}$ e $\theta : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis e considere a curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\gamma(t) = \rho(t)\big(\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t)\big),$$

para todo $t \in I$.

(a) Dado $t \in I$, escreva uma fórmula para $\gamma'(t)$ e para $\|\gamma'(t)\|$.

(b) Supondo que $I = [a, b]$ e que as funções ρ e θ sejam de classe C^1, escreva uma fórmula para o comprimento de γ.

Exercício 4 (movimento do centro de massa)**.** Considere uma coleção finita de partículas massivas movendo-se em $\mathbb{R}^3$ com trajetórias descritas pelas curvas parametrizadas duas vezes deriváveis

$$\gamma_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \ldots, \quad \gamma_k : I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Denote por $m_i > 0$ a massa da i-ésima partícula. A força resultante sobre a i-ésima partícula no instante $t \in I$ é dada por

$$F_i(t) = m_i \gamma_i''(t)$$

e o *centro de massa* dessa coleção de partículas no instante $t \in I$ é o ponto $C(t) \in \mathbb{R}^3$ definido por

$$C(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{k} m_i \gamma_i(t),$$

em que $M = \sum_{i=1}^{k} m_i$ é a massa total. Mostre que o centro de massa comporta-se como se toda a massa da coleção de partículas estivesse concentrada nele e como se todas as forças agindo sobre a coleção de partículas agissem sobre ele, isto é, mostre que

$$MC''(t) = \sum_{i=1}^{k} F_i(t),$$

para todo $t \in I$.

Exercício 5 (velocidade angular vetorial de um ponto que gira em torno de um eixo)**.** Dados $\theta \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, denote por $R_\theta(x, y, z)$ o ponto de $\mathbb{R}^3$ obtido pela rotação do ponto (x, y, z) por um ângulo θ em torno do eixo z no sentido do eixo x para o eixo y (pelo arco mais curto). Pode-se mostrar que[1]:

$$R_\theta(x, y, z) = \big(x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta, z\big).$$

Seja agora $\theta : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e seja $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ um ponto. Considere a curva parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma(t) = R_{\theta(t)}(x_0, y_0, z_0) = \big(x_0 \cos\theta(t) - y_0 \operatorname{sen}\theta(t), x_0 \operatorname{sen}\theta(t) + y_0 \cos\theta(t), z_0\big),$$

para todo $t \in I$. Mostre que a derivada $\gamma'(t)$ é dada pelo produto vetorial

$$\gamma'(t) = \vec{\omega}(t) \wedge \gamma(t),$$

para todo $t \in I$, em que a *velocidade angular vetorial* $\vec{\omega}(t)$ é definida por:

$$\vec{\omega}(t) = \big(0, 0, \theta'(t)\big).$$

---

[1]Se $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$, é fácil ver que $R_\theta(e_1) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $R_\theta(e_2) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$ e $R_\theta(e_3) = e_3$. É fácil ver também que

$$R_\theta(v + w) = R_\theta(v) + R_\theta(w) \quad \text{e} \quad R_\theta(kv) = kR_\theta(v),$$

para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$ e todo $k \in \mathbb{R}$ (isto é, R_θ é uma *transformação linear*). Agora, para calcular $R_\theta(x, y, z)$, note que $(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

Exercício 6 (forças fictícias num referencial que gira com velocidade angular constante)**.** Seja dado $\omega \in \mathbb{R}$ e para cada $t \in \mathbb{R}$ considere a base

$$\mathcal{B}_t = \{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$e_1(t) = \big(\cos(\omega t), \operatorname{sen}(\omega t), 0\big), \quad e_2(t) = \big(-\operatorname{sen}(\omega t), \cos(\omega t), 0\big),$$
$$e_3(t) = (0, 0, 1),$$

isto é, $\mathcal{B}_t$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que gira em torno do eixo z com velocidade angular constante ω. Seja $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada e para cada $t \in I$ denote por $\bar{\gamma}(t) = \big(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)\big)$ as coordenadas de $\gamma(t)$ na base $\mathcal{B}_t$, isto é, vale a igualdade:

$$\gamma(t) = \bar{x}(t)e_1(t) + \bar{y}(t)e_2(t) + \bar{z}(t)e_3(t). \tag{1}$$

(a) Verifique que:

$$e_1'(t) = \omega e_2(t), \quad e_2'(t) = -\omega e_1(t) \quad \text{e} \quad e_3'(t) = 0.$$

(b) Suponha que γ seja duas vezes derivável. Derive a igualdade (1) dos dois lados duas vezes e use o resultado do item (a) para obter a fórmula:

$$\gamma''(t) = \big(\bar{x}''(t) - 2\omega\bar{y}'(t) - \omega^2\bar{x}(t)\big)e_1(t) + \big(\bar{y}''(t) + 2\omega\bar{x}'(t) - \omega^2\bar{y}(t)\big)e_2(t)$$
$$+ \bar{z}''(t)e_3(t).$$

(c) Suponha que γ seja a trajetória de uma partícula de massa $m > 0$ sujeita a uma força total $F(t)$ em cada instante t, de modo que:

$$F(t) = m\gamma''(t),$$

para todo $t \in I$. Denote por $\bar{F}(t) = \big(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \bar{F}_3(t)\big)$ as coordenadas de $F(t)$ na base $\mathcal{B}_t$, de modo que:

$$m\gamma''(t) = F(t) = \bar{F}_1(t)e_1(t) + \bar{F}_2(t)e_2(t) + \bar{F}_3(t)e_3(t).$$

Usando a igualdade acima e o resultado do item (b), conclua que:

$$\bar{F}(t) = m\bar{\gamma}''(t) + 2m\,\vec{\omega} \wedge \bar{\gamma}'(t) - m\omega^2\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t), 0\big),$$

em que $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Obtenha então a igualdade

$$m\bar{\gamma}''(t) = \bar{F}(t) + F_{\text{cor}}(t) + F_{\text{cen}}(t), \tag{2}$$

em que a *força de Coriolis* F_{cor} é dada por

$$F_{\text{cor}}(t) = 2m\,\bar{\gamma}'(t) \wedge \vec{\omega}$$

e a *força centrífuga* F_{cen} é dada por:

$$F_{\text{cen}}(t) = m\omega^2\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t), 0\big).$$

A força de Coriolis e a força centrífuga são forças fictícias que aparentam existir do ponto de vista do referencial girante $\mathcal{B}_t$. O termo $\bar{F}(t)$ em (2) corresponde simplesmente à força real $F(t)$ escrita no referencial girante.

Exercício 7 (curva contínua de comprimento infinito)**.** Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = x \operatorname{sen}\big(\tfrac{1}{x}\big),$$

se $x \in \,]0,1]$ e $f(x) = 0$, se $x = 0$. Para cada inteiro positivo n, sejam

$$p_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{e} \quad q_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$$

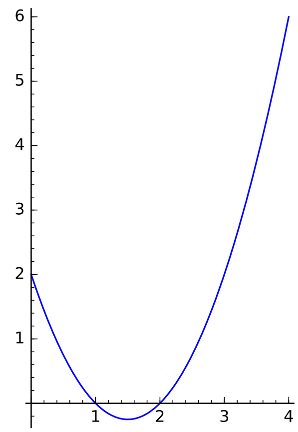
e denote por L_n o comprimento do gráfico da restrição de f ao intervalo $[q_n, p_n]$.

(a) Note que L_n é maior ou igual à distância entre os pontos $\big(p_n, f(p_n)\big)$ e $\big(q_n, f(q_n)\big)$ e conclua que $L_n \geq q_n$, para todo inteiro positivo n.

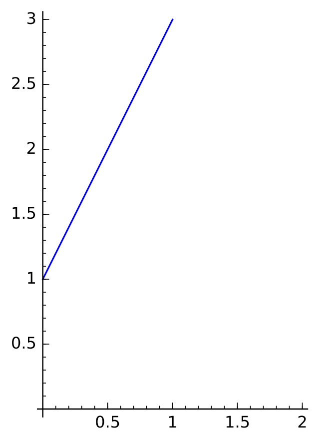
(b) Conclua que o comprimento do gráfico de f é infinito. (Sugestão: você pode usar o fato que a *série harmônica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente.)

Respostas

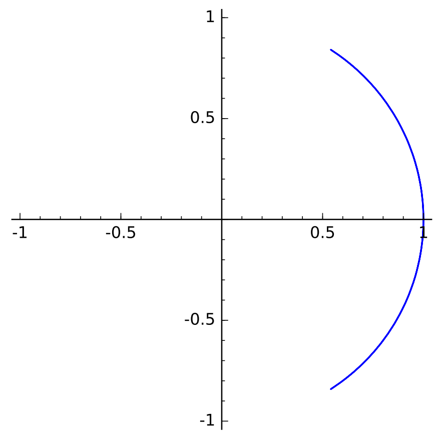
Exercício 1.
(a) A imagem de γ é o pedaço da parábola $y = x^2 - 3x + 2$ que fica no semi-plano $x \geq 0$:



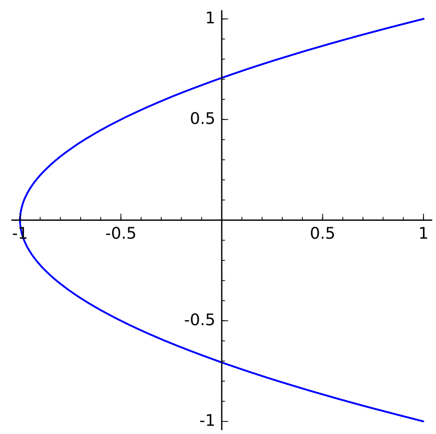
(b) A imagem de γ é o pedaço da reta $y = 2x + 1$ que fica no semi-plano $x \geq 0$:



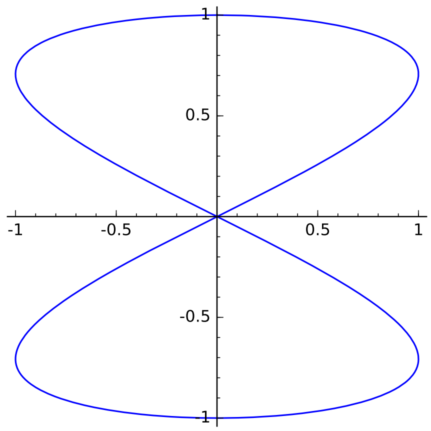
(c) A imagem de γ é o arco do círculo unitário de centro na origem delimitado pelos pontos $\big(\cos 1, \operatorname{sen} 1\big)$ e $\big(\cos 1, -\operatorname{sen} 1\big)$ e que fica no semiplano $x \geq 0$:



(d) A imagem de γ é o arco da parábola $x = 2y^2 - 1$ delimitado pelos pontos $(1, 1)$ e $(1, -1)$:



(e) A imagem de γ é uma "figura 8" como ilustrado abaixo:



Exercício 2. (a) $\sqrt{2}\,T$; (b) $3(T^2-1)$.

Exercício 3.
(a) $\gamma'(t)=\rho'(t)\big(\cos\theta(t),\operatorname{sen}\theta(t)\big)+\rho(t)\theta'(t)\big(-\operatorname{sen}\theta(t),\cos\theta(t)\big)$;

$$\|\gamma'(t)\|=\big(\rho'(t)^2+\rho(t)^2\theta'(t)^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) $\int_a^b\big(\rho'(t)^2+\rho(t)^2\theta'(t)^2\big)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$.