Quinta Lista

MAT0112 – Vetores e Geometria

Prof. Daniel Victor Tausk
10/05/2018

Exercício 1. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3 e sejam $O, A, B, C, D \in E^3$ pontos tais que:

$$\overrightarrow{OA} = (1, -1, 1)_{\mathcal{B}}, \quad \overrightarrow{OB} = (0, 2, 1)_{\mathcal{B}}, \quad \overrightarrow{OC} = (2, 1, -1)_{\mathcal{B}} \;\text{ e }\; \overrightarrow{OD} = (1, 3, 2)_{\mathcal{B}}.$$

Determine o volume do tetraedro de vértices A, B, C e D.

Exercício 2. Sejam $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \in V^3$ vetores tais que $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] = 2$. Calcule o valor do produto misto $[\vec{v} - \vec{w}, \vec{w} + 2\vec{z}, 2\vec{v} + \vec{z}]$.

Exercício 3. Seja fixada uma orientação no espaço e seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal positiva de V^3. Considere os vetores:

$$\vec{v} = (-1, 0, 2)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{w} = (2, 1, -1)_{\mathcal{B}}.$$

Determine uma base ortonormal positiva $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de V^3 tal que $\vec{e}_1$ tenha a mesma direção e sentido que $\vec{v}$ e tal que $\vec{e}_2$ seja da forma $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$.

Exercício 4. Seja fixada uma orientação no espaço e seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal positiva de V^3. Considere os vetores:

$$\vec{v} = (2, 1, 3)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \vec{w} = (-2, 1, 1)_{\mathcal{B}}.$$

Determine um vetor $\vec{x} \in V^3$ que seja ortogonal a $\vec{v}$ e tal que $\vec{v} \wedge \vec{x} = \vec{w}$.

Exercício* 5 (forças internas não produzem torque)**.** Suponha que tenhamos um sistema com n partículas cujas posições sejam representadas por pontos $Q_1, \ldots, Q_n \in E^3$ e tais que, para $i, j = 1, 2, \ldots, n$, a força exercida pela j-ésima partícula sobre a i-ésima partícula seja representada por um vetor $\vec{F}_{ij} \in V^3$. Assumimos válida a *lei de ação e reação*

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

e assumimos que a força $\vec{F}_{ij}$ seja paralela à reta que passa pelos pontos Q_i e Q_j, i.e., assumimos que os vetores $\vec{F}_{ij}$ e $Q_j - Q_i$ sejam linearmente dependentes, para todos $i, j = 1, 2, \ldots, n$. A *força (interna) resultante* sobre a i-ésima partícula é definida por

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

e, dado um ponto arbitrário de referência $O \in E^3$, definimos o *torque (interno) resultante* sobre a i-ésima partícula por:

$$\vec{\tau}_i = (Q_i - O) \wedge \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Mostre que, sob as hipóteses acima, o *torque interno total* $\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i$ é nulo.

Exercício* 6 (fórmula para o produto misto em bases arbitrárias)**.** Seja $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ uma matriz real 3×3 e sejam dados vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in V^3$. Defina:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3, \\ \vec{v}_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{23}\vec{e}_3 \quad \text{e} \\ \vec{v}_3 &= a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Mostre que:

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \det(A)[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3].$$

Conclua que se $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base de V^3, então

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \det\big([\vec{v}_1]_{\mathcal{B}}, [\vec{v}_2]_{\mathcal{B}}, [\vec{v}_3]_{\mathcal{B}}\big)\,[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3],$$

para quaiquer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V^3$.

Exercício* 7. Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V^3$ e considere a matriz:

$$g = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \\ \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 \end{pmatrix}.$$

Mostre que $\det(g) \geq 0$ e que:

$$\big|[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]\big| = \big(\det(g)\big)^{\frac{1}{2}}.$$

(Sugestão: se $\mathcal{B}$ for uma base ortonormal de V^3 e se M for a matriz cujas colunas são $[\vec{v}_1]_{\mathcal{B}}$, $[\vec{v}_2]_{\mathcal{B}}$ e $[\vec{v}_3]_{\mathcal{B}}$, verifique que $M^{\mathrm{t}}M = g$.)

Exercício* 8 (produto vetorial duplo)**.** Este exercício é um roteiro para a demonstração da fórmula

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}, \tag{1}$$

válida para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$.

(a) Mostre que ambos os lados da igualdade (1) são nulos se os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forem linearmente dependentes.

(b) Mostre que a igualdade (1) é válida se os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forem ortogonais. (Sugestão: é possível escolher uma base ortonormal positiva $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ tal que $\vec{v}$ seja paralelo a $\vec{e}_1$ e $\vec{w}$ seja paralelo a $\vec{e}_2$.)

(c) Mostre que a fórmula (1) vale em geral. (Sugestão: supondo que $\vec{w}$ não seja nulo, você pode escrever $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, com $\vec{v}_1$ paralelo a $\vec{w}$ e $\vec{v}_2$ ortogonal a $\vec{w}$.)

Exercício* 9 (fórmula para o produto vetorial em bases arbitrárias)**.** Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base de V^3 e sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ tais que:

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{e} \quad [\vec{w}]_{\mathcal{B}} = (w_1, w_2, w_3).$$

Considere o vetor

$$\vec{z} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

dado pela fórmula usual que daria como resultado o produto vetorial $\vec{v} \wedge \vec{w}$, caso a base $\mathcal{B}$ fosse ortonormal e positiva.

(a) Mostre que, para $i = 1, 2, 3$, a i-ésima coordenada de $\vec{z}$ na base $\mathcal{B}$ é igual ao determinante $\det\big([\vec{e}_i]_{\mathcal{B}}, [\vec{v}]_{\mathcal{B}}, [\vec{w}]_{\mathcal{B}}\big)$.

(b) Mostre que, para $i = 1, 2, 3$, a i-ésima coordenada do vetor

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\vec{z}$$

na base $\mathcal{B}$ é igual a $[\vec{e}_i, \vec{v}, \vec{w}]$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 6.)

(c) Considere a matriz:

$$g = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Mostre que

$$[\vec{v} \wedge \vec{w}]_{\mathcal{B}} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]\ g^{-1}[\vec{z}]_{\mathcal{B}},$$

em que $[\vec{v} \wedge \vec{w}]_{\mathcal{B}}$ e $[\vec{z}]_{\mathcal{B}}$ denotam, respectivamente, as matrizes coluna contendo as coordenadas de $\vec{v} \wedge \vec{w}$ e de $\vec{z}$ na base $\mathcal{B}$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 9 da terceira lista.)

Respostas

Exercício 1. $\frac{13}{6}$.

Exercício 2. -6.

Exercício 3. $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, 2)_{\mathcal{B}}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{70}}(6, 5, 3)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 3, -1)_{\mathcal{B}}$.

Exercício 4. $\vec{x} = \left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{2}{7}\right)_{\mathcal{B}}$.