Quinta Lista

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk

27/04/2013

Exercício 1. Resolva os itens a seguir usando os resultados dados em aula a respeito de derivadas de funções inversas.

(a) A função arcsen, definida no intervalo $[-1,1]$, é a inversa da restrição da função seno ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Mostre que arcsen é derivável somente nos pontos do intervalo aberto $\left]-1,1\right[$ e que:

$$\operatorname{arcsen}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in\left]-1,1\right[.$$

(b) A função arccos, definida no intervalo $[-1,1]$, é a inversa da restrição da função cosseno ao intervalo $[0,\pi]$. Mostre que arccos é derivável somente nos pontos do intervalo aberto $\left]0,\pi\right[$ e que:

$$\arccos'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in\left]0,\pi\right[.$$

(c) A função arctg, definida em $\mathbb{R}$, é a inversa da restrição da função tangente ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Mostre que a função arctg é derivável e que:

$$\operatorname{arctg}'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}.$$

(d) A função arccotg, definida em $\mathbb{R}$, é a inversa da restrição da função cotangente ao intervalo $\left]0,\pi\right[$. Mostre que a função arccotg é derivável e que:

$$\operatorname{arccotg}'(x)=-\frac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}.$$

(e) A função arcsec, definida em $\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$, é a inversa da restrição da função secante ao conjunto $[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Mostre que a função arcsec é derivável somente nos pontos do conjunto:

$$\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

e que:

$$\operatorname{arcsec}'(x)=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}},\quad x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[.$$

(f) A função arccossec, definida em $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, é a inversa da restrição da função cossecante ao conjunto $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$. Mostre que a função arccossec é derivável somente nos pontos do conjunto:

$$]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

e que:

$$\operatorname{arccossec}'(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\,.$$

Obtenha também os resultados dos itens (b), (d) e (f) a partir dos resultados dos itens (a), (c) e (e), respectivamente, usando que:

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen}(x), \quad \operatorname{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x),$$
$$\operatorname{arccossec}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec}(x).$$

O próximo exercício é enunciado usando uma linguagem comum em textos de física: não damos nomes às funções, mas sim a grandezas variáveis interdependentes. As funções ficam implícitas na forma como as grandezas dependem umas das outras.

Exercício 2. Um objeto se move no primeiro quadrante aberto

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\big\}$$

de um plano cartesiano Oxy. No instante t, o objeto encontra-se no ponto $P = (x, y)$. Denote por $\rho > 0$ a distância de P até a origem $O = (0, 0)$ e por $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a medida do ângulo determinado pela semi-reta $\overrightarrow{OP}$ e o eixo das abscissas.

(a) Determine as taxas de variação $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ em termos de ρ, θ, $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$ e $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

(b) Determine as taxas de variação $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ em termos de x, y, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ e $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

(c) Denote por A a área do setor circular de centro na origem, contido no primeiro quadrante, determinado pelos pontos $P = (x, y)$ e $(\rho, 0)$. Determine a taxa de variação $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$ em termos de ρ, θ, $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$ e $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

Sugestão: para resolver o item (a), você deve escrever x e y em termos de ρ e θ e aplicar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ (isto é, derivar com respeito a t) dos dois lados da igualdade. Não se esqueça que x, y, ρ e θ são funções de t, não são constantes! O item (b) pode ser resolvido de duas formas: você pode fazer algo parecido com o que fez no item (a), escrevendo ρ e θ em termos de x e y e aplicar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ dos dois lados da igualdade. Você também pode resolver o item (b) usando as fórmulas obtidas na resolução do item (a) para $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ e $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, tratando essas igualdades como um sistema linear de duas equações que deve ser resolvido para determinar as incógnitas $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$ e $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

Exercício 3. Determine os pontos de máximo e mínimo global da função $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$, para todo $x \in [0,2]$. Justifique a sua resposta.

Exercício* 4.** Considere a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma:

(i) $f(0) = 0$;
(ii) se $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, com n inteiro positivo, então $f(x) = x + \frac{1}{n^2}$;
(iii) se $n < x \leq n+1$, com n inteiro positivo, então $f(x) = p_n(x)$, onde $p_n(x) = a_n x + b_n$ é o polinômio de primeiro grau tal que:

$$p_n(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}, \quad p_n(n+1) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2}.$$

Mostre que:

(a) a função f é injetora e sua imagem é o intervalo $[0,2]$;
(b) a função f é derivável na origem e $f'(0) = 1$;
(c) a função inversa $f^{-1} : [0,2] \to \mathbb{R}$ não é contínua (e portanto não é derivável) na origem.