Quarta Lista

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk
28/04/2018

Exercício 1. Sejam X um conjunto, $(Y,\mathcal{B})$ um espaço mensurável e seja $\varphi : X \to Y$ uma função. Vimos no item (c) do Exercício 7 da primeira lista que $\mathcal{A} = \big\{\varphi^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}\big\}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Dizemos que $\mathcal{A}$ é a *σ-álgebra induzida* em X por φ. Note que quando X é um subconjunto de Y e φ é a aplicação inclusão, então $\mathcal{A}$ é simplesmente a σ-álgebra $\mathcal{B}|_X$ que normalmente chamamos de σ-álgebra induzida num subconjunto de um espaço mensurável.

(a) Mostre que $\mathcal{A}$ é a menor σ-álgebra de subconjuntos de X que torna φ mensurável, i.e., a função $\varphi : (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ é mensurável e, se $\mathcal{A}'$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X tal que $\varphi : (X,\mathcal{A}') \to (Y,\mathcal{B})$ é mensurável, então $\mathcal{A}'$ contém $\mathcal{A}$.

(b) Se $(Z,\mathcal{C})$ é um espaço mensurável e $f : Z \to X$ é uma função, mostre que $f : (Z,\mathcal{C}) \to (X,\mathcal{A})$ é mensurável se, e somente se, $\varphi \circ f : (Z,\mathcal{C}) \to (Y,\mathcal{B})$ for mensurável. Interprete esse resultado no caso em que X é um subconjunto de Y e φ é a aplicação inclusão.

Exercício 2. Sejam X um conjunto, $\big((Y_i,\mathcal{B}_i)\big)_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis e, para cada $i \in I$, seja dada uma função $\varphi_i : X \to Y_i$. Denote por $\mathcal{A}$ a σ-álgebra de subconjuntos de X gerada por:

$$\bigcup_{i\in I} \big\{\varphi_i^{-1}[B] : B \in \mathcal{B}_i\big\}.$$

Dizemos que $\mathcal{A}$ é a *σ-álgebra induzida* em X pela família de funções $(\varphi_i)_{i\in I}$.

(a) Mostre que $\mathcal{A}$ é a menor σ-álgebra de subconjuntos de X que torna todas as funções φ_i mensuráveis, i.e., para todo $i \in I$ a função $\varphi_i : (X,\mathcal{A}) \to (Y_i,\mathcal{B}_i)$ é mensurável e, se $\mathcal{A}'$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X tal que $\varphi_i : (X,\mathcal{A}') \to (Y_i,\mathcal{B}_i)$ é mensurável para todo $i \in I$, então $\mathcal{A}'$ contém $\mathcal{A}$.

(b) Sejam $(Z,\mathcal{C})$ um espaço mensurável e $f : Z \to X$ uma função. Mostre que $f : (Z,\mathcal{C}) \to (X,\mathcal{A})$ é mensurável se, e somente se, $\varphi_i \circ f : (Z,\mathcal{C}) \to (Y_i,\mathcal{B}_i)$ for mensurável, para todo $i \in I$.

(c) Se $(Y_1,\mathcal{B}_1)$ e $(Y_2,\mathcal{B}_2)$ são espaços mensuráveis e se $\pi_i : Y_1 \times Y_2 \to Y_i$, $i = 1,2$, denotam as projeções, mostre que a σ-álgebra induzida em $X = Y_1 \times Y_2$ pela família $(\pi_i)_{i=1,2}$ é a σ-álgebra produto $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

(d) Em $\prod_{i\in I} Y_i$ definimos a *σ-álgebra produto* $\bigotimes_{i\in I}\mathcal{B}_i$ como sendo a σ-álgebra induzida pela família de projeções $(\pi_i)_{i\in I}$. Interprete o resultado do item (b) acima no caso em que $X = \prod_{i\in I} Y_i$ e $\varphi_i = \pi_i$, para todo $i \in I$.

Exercício 3. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, Y um conjunto e seja $\varphi : X \to Y$ uma função. Vimos no item (a) do Exercício 4 da segunda lista que $\mathcal{B} = \big\{B \in \wp(Y) : \varphi^{-1}[B] \in \mathcal{A}\big\}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Y. Dizemos que $\mathcal{B}$ é a *σ-álgebra coinduzida* em Y por φ. Quando a função φ é sobrejetora, diz-se também que $\mathcal{B}$ é a *σ-álgebra quociente*[1].

(a) Mostre que $\mathcal{B}$ é a maior σ-álgebra de subconjuntos de Y que torna φ mensurável, i.e., a função $\varphi : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ é mensurável e, se $\mathcal{B}'$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Y tal que $\varphi : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B}')$ é mensurável, então $\mathcal{B}$ contém $\mathcal{B}'$.

(b) Dado um espaço mensurável $(Z, \mathcal{C})$ e uma função $f : Y \to Z$, mostre que $f : (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$ é mensurável se, e somente se, a função composta $f \circ \varphi : (X, \mathcal{A}) \to (Z, \mathcal{C})$ for mensurável.

(c) Pense no significado do item (b) no contexto em que Y é o quociente de X por uma relação de equivalência e φ é a aplicação quociente.

Exercício 4. Sejam $\big((X_i, \mathcal{A}_i)\big)_{i \in I}$ uma família de espaços mensuráveis, Y um conjunto e, para cada $i \in I$, seja dada uma função $\varphi_i : X_i \to Y$. Temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \big\{B \in \wp(Y) : \varphi_i^{-1}[B] \in \mathcal{A}_i, \text{ para todo } i \in I\big\}\\ &= \bigcap_{i \in I} \big\{B \in \wp(Y) : \varphi_i^{-1}[B] \in \mathcal{A}_i\big\}\end{aligned}$$

é uma σ-álgebra de subconjuntos de Y, já que é uma interseção de σ-álgebras de subconjuntos de Y. Dizemos que $\mathcal{B}$ é a *σ-álgebra coinduzida* em Y pela família de funções $(\varphi_i)_{i \in I}$.

(a) Mostre que $\mathcal{B}$ é a maior σ-álgebra que torna todas as funções φ_i mensuráveis, i.e., para todo $i \in I$ a função $\varphi_i : (X_i, \mathcal{A}_i) \to (Y, \mathcal{B})$ é mensurável e, se $\mathcal{B}'$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Y tal que a função $\varphi_i : (X_i, \mathcal{A}_i) \to (Y, \mathcal{B}')$ é mensurável para todo $i \in I$, então $\mathcal{B}$ contém $\mathcal{B}'$.

(b) Dado um espaço mensurável $(Z, \mathcal{C})$ e uma função $f : Y \to Z$, mostre que $f : (Y, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{C})$ é mensurável se, e somente se, a função composta $f \circ \varphi_i : (X_i, \mathcal{A}_i) \to (Z, \mathcal{C})$ for mensurável para todo $i \in I$.

[1]Note que se φ é sobrejetora, então podemos identificar Y com o quociente de X pela relação de equivalência definida por $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. A identificação faz corresponder a classe de equivalência de $x \in X$ a $\varphi(x) \in Y$.

Exercício 5. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e Y um espaço topológico Hausdorff com base enumerável de abertos munido da sua σ-álgebra de Borel. Mostre que se $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ são funções mensuráveis, então o conjunto

$$\big\{x \in X : f(x) = g(x)\big\}$$

dos pontos em que f e g coincidem é mensurável. (Sugestão: a diagonal do produto $Y \times Y$ é fechada, já que Y é Hausdorff.) Conclua que se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (em que $\overline{\mathbb{R}}$ é munido da sua σ-álgebra de Borel), então o conjunto

$$\big\{x \in X : \text{a sequência } \big(f_n(x)\big)_{n\geq 1} \text{ converge em } \overline{\mathbb{R}}\big\}$$

é mensurável. (Sugestão: uma sequência em $\overline{\mathbb{R}}$ é convergente se, e somente se, seu limite inferior coincidir com o seu limite superior.)

Exercício 6. Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e (M, d) um espaço métrico separável, munido da sua σ-álgebra de Borel.

(a) Se $f : X \to M$ e $g : X \to M$ são funções mensuráveis, mostre que a função $d(f, g) : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$X \ni x \longmapsto d\big(f(x), g(x)\big) \in \mathbb{R}$$

é mensurável, em que $\mathbb{R}$ é munido da sua σ-álgebra de Borel.

(b) Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to M$, mostre que o conjunto

$$\big\{x \in X : \text{a sequência } \big(f_n(x)\big)_{n\geq 1} \text{ é de Cauchy}\big\}$$

é mensurável.

Exercício 7. Recorde que um espaço topológico Y é dito *normal* se dados fechados disjuntos F_1 e F_2 em Y, existem abertos disjuntos U_1 e U_2 em Y com $F_1 \subset U_1$ e $F_2 \subset U_2$. O espaço topológico Y é dito *perfeitamente normal*[2] se for normal e se todo aberto de Y for uma união enumerável de fechados de Y. (Por exemplo, espaços métricos são espaços perfeitamente normais.)

(a) Mostre que se Y é um espaço topológico normal, F é fechado em Y, U é aberto em Y e $F \subset U$, então existe um aberto V em Y que contém F e tal que o fecho de V está contido em U.

(b) Mostre que se Y é um espaço topológico perfeitamente normal, então para todo aberto U de Y existe uma sequência de fechados $(F_k)_{k\geq 1}$ em Y tal que $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ e F_k está contido no interior de F_{k+1}, para todo $k \geq 1$.

(c) Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, Y um espaço topológico perfeitamente normal munido da sua σ-álgebra de Borel e $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to Y$ que converge pontualmente para uma função $f : X \to Y$. Mostre que f é mensurável. (Sugestão: se U é um aberto de Y e $(F_k)_{k\geq 1}$ é como no item (b), mostre que para todo $x \in X$ vale que $f(x) \in U$ se, e somente se, existem $k \geq 1$ e $n_0 \geq 1$ tais que $f_n(x) \in F_k$ para todo $n \geq n_0$.)

(d) Sejam $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, N um espaço métrico completo e M um Boreleano de N munido da topologia induzida de N e da sua σ-álgebra de Borel. Suponha que M seja separável. Se $(f_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de funções mensuráveis $f_n : X \to M$, mostre que o conjunto

$$\big\{x \in X : \text{a sequência } \big(f_n(x)\big)_{n\geq 1} \text{ converge em } M\big\}$$

é mensurável. (Sugestão: o conjunto S dos pontos $x \in X$ tais que $\big(f_n(x)\big)_{n\geq 1}$ converge no fecho de M é mensurável, pelo resultado do item (b) do Exercício 6. Além do mais, o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $\big(f_n(x)\big)_{n\geq 1}$ converge em M é $f^{-1}[M]$, em que $f : S \to \overline{M}$ é o limite pontual de $(f_n|_S)_{n\geq 1}$.)

---

[2]Usando o Lema de Urysohn mostra-se que um espaço topológico é perfeitamente normal se, e somente se, todo fechado coincide com o conjunto dos zeros de alguma função contínua definida no espaço e tomando valores reais. Um espaço topológico perfeitamente normal que também é T1 (i.e., um espaço em que os conjuntos unitários são fechados) é chamado de *espaço* T6 e um espaço topológico normal que também é T1 é chamado de *espaço* T4. As propriedades T0, T1, ..., T6 são conhecidas como *axiomas de separação* em topologia. A presença ou não da hipótese de que o espaço seja T1 na formulação dos axiomas de separação varia de autor para autor.

Exercício* 8. O objetivo deste exercício é examinar a seguinte questão: dado um conjunto X, será que a σ-álgebra produto $\wp(X) \otimes \wp(X)$ coincide com a σ-álgebra $\wp(X \times X)$? Note que se X está munido da topologia discreta, então $\wp(X)$ coincide com a σ-álgebra de Borel de X e a topologia produto em $X \times X$ também é a topologia discreta, de modo que um contra-exemplo para a igualdade $\wp(X \times X) = \wp(X) \otimes \wp(X)$ fornece um contra-exemplo para o teorema mostrado em aula de que a σ-álgebra de Borel do produto de dois espaços topológicos com base enumerável de abertos coincide com o produto de suas σ-álgebras de Borel, quando removemos a hipótese de que os espaços tenham base enumerável de abertos. Abaixo apresentamos um roteiro para a demonstração de que, se X tem cardinalidade maior[3] do que a da reta real, então $\wp(X) \otimes \wp(X)$ é de fato diferente de $\wp(X \times X)$.

(a) Dado um subconjunto S de $X \times X$, denote por $\lambda_S : X \to \wp(X)$ a função definida por
$$\lambda_S(x) = \big\{y \in X : (x, y) \in S\big\} \in \wp(X),$$
para todo $x \in X$. Mostre que a correspondência $S \mapsto \lambda_S$ estabelece uma bijeção entre $\wp(X \times X)$ e o conjunto de todas as funções de X em $\wp(X)$. Como é a função λ_S quando S é da forma $A \times B$, com $A, B \subset X$?

(b) Se $(S_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos de $X \times X$ e $S = \bigcup_{i \in I} S_i$, mostre que
$$\lambda_S(x) = \bigcup_{i \in I} \lambda_{S_i}(x),$$
para todo $x \in X$. Mostre também que se S é um subconjunto qualquer de $X \times X$, então
$$\lambda_{S^{\mathrm{c}}}(x) = \big(\lambda_S(x)\big)^{\mathrm{c}},$$
para todo $x \in X$.

(c) Seja $\mathcal{A}$ a coleção dos conjuntos $S \in \wp(X \times X)$ tais que a imagem de λ_S tenha cardinalidade menor ou igual à cardinalidade da reta real. Mostre que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de $X \times X$ que contém todos os produtos cartesianos $A \times B$, com $A, B \subset X$.

(d) Mostre que se a cardinalidade de X é maior do que a cardinalidade da reta real, então $\wp(X) \otimes \wp(X)$ não é igual a $\wp(X \times X)$. Mais especificamente, mostre que nesse caso a diagonal
$$\Delta = \big\{(x, x) : x \in X\big\}$$
não está em $\wp(X) \otimes \wp(X)$.

[3]Curiosamente, quando X tem a cardinalidade da reta real, então a igualdade entre $\wp(X \times X)$ e $\wp(X) \otimes \wp(X)$ é independente dos axiomas de ZFC. Para mais detalhes, vide J. R. Shoenfield, *Martin's Axiom*, The American Mathematical Monthly, vol. 82(6), 1975, pgs. 610—617, Teorema 6 e os comentários logo acima e logo abaixo do Teorema.