Quarta Lista

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk

31/08/2013

Recordemos algumas definições dadas em aula.

Definição 1. Dada uma métrica (ou pseudo-métrica) $d : M \times M \to \mathbb{R}$ num conjunto M, então a *topologia* definida por d é o conjunto τ^d formado por todos os subconjuntos de M que são abertos com respeito à métrica d, isto é:

$$\tau^d = \big\{A \in \wp(M) : \text{para todo } x \in A, \text{ existe } r > 0, \, \mathrm{B}(x,r) \subset A\big\},$$

onde $\wp(M)$ denota o conjunto das partes de M. Dizemos que duas métricas d e d' são *equivalentes* (ou *topologicamente equivalentes*) quando $\tau^d = \tau^{d'}$.

Como vimos em aula, duas métricas d e d' num conjunto M são equivalentes se e somente se a aplicação identidade $\mathrm{Id} : (M,d) \to (M,d')$ é um homeomorfismo, isto é, se e somente se ambas as aplicações identidade $\mathrm{Id} : (M,d) \to (M,d')$ e $\mathrm{Id} : (M,d') \to (M,d)$ são contínuas.

Definição 2. Duas métricas d e d' num conjunto M são ditas *uniformemente equivalentes* se ambas as aplicações identidade:

$$\mathrm{Id} : (M,d) \longrightarrow (M,d'), \quad \mathrm{Id} : (M,d') \longrightarrow (M,d) \tag{1}$$

são uniformemente contínuas. Dizemos que d e d' são *Lipschitz-equivalentes* se as aplicações identidade (1) são Lipschitzianas.

Exercício 1. Seja M um conjunto e seja $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as métricas em M. Mostre que a relação de equivalência topológica:

$$d \sim d' \Longleftrightarrow d \text{ é topologicamente equivalente à } d', \quad d, d' \in \mathcal{D},$$

é uma relação de equivalência em $\mathcal{D}$ (isto é, uma relação binária reflexiva, simétrica e transitiva). Faça o mesmo trocando "equivalência topológica" por "equivalência uniforme" e por "equivalência Lipschitz".

Exercício 2. Sejam (M,d), (N,d') espaços métricos e $\varphi : M \to N$ uma função bijetora. Seja d_φ a métrica em M induzida por φ:

$$d_\varphi(x,y) = d'\big(\varphi(x),\varphi(y)\big), \quad x,y \in M.$$

Mostre que:

(a) d_φ é topologicamente equivalente a d se e somente se a aplicação $\varphi : (M,d) \to (N,d')$ é um homeomorfismo;

(b) d_φ é uniformemente equivalente a d se e somente se a aplicação $\varphi : (M,d) \to (N,d')$ e sua inversa são uniformemente contínuas;

(c) d_φ é Lipschitz-equivalente a d se e somente se $\varphi : (M,d) \to (N,d')$ e sua inversa são Lipschitzianas.

(Sugestão: considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd} & (N,d') \\ (M,d) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & (M,d_\varphi) \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

e tenha em mente que $\varphi : (M,d_\varphi) \to (N,d')$ é uma isometria.)

Exercício 3. Seja (M,d) um espaço métrico e defina $d' : M \times M \to \mathbb{R}$ fazendo:

$$d'(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}, \quad x,y \in M.$$

(a) Mostre que d' é uma métrica em M.

(b) Mostre que d e d' são uniformemente equivalentes. Conclua que toda métrica é uniformemente equivalente a uma métrica limitada. Observe também que d e d' não podem ser Lipschitz-equivalentes se d não for limitada.

Exercício 4. Sejam (M,d) um espaço métrico, $f : M \to \mathbb{R}^n$ uma função e $f_i : M \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$, suas funções coordenadas (isto é, as composições de f com as projeções de $\mathbb{R}^n$). Suponha $\mathbb{R}^n$ munido de alguma das normas $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le +\infty)$ e $\mathbb{R}$ munido da métrica usual. Mostre que:

(a) a função f é uniformemente contínua se e somente se f_i é uniformemente contínua, para todo $i = 1,\ldots,n$;

(b) a função f é Lipschitziana se e somente se f_i é Lipschitziana, para todo $i = 1,\ldots,n$.

Exercício 5. Seja V um espaço vetorial real munido de uma norma $\|\cdot\|$. Considere o produto cartesiano $V \times V$ munido da norma:

$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad x, y \in V,$$

e o produto cartesiano $\mathbb{R} \times V$ munido da norma:

$$\|(\lambda, x)\| = \max\{|\lambda|, \|x\|\}, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ x \in V.$$

(a) Mostre que a "aplicação soma":

$$+ : V \times V \ni (x,y) \longmapsto x + y \in V$$

é Lipschitziana (e portanto uniformemente contínua e contínua).

(b) Mostre que a "aplicação multiplicação por escalar":

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \ni (\lambda, x) \longmapsto \lambda x \in V$$

é contínua.

(c) Mostre que a norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz igual a 1 (sendo $\mathbb{R}$ munido da sua métrica usual).