Quarta Lista

MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk
05/04/2014

Exercício 1. Sejam V e V' espaços vetoriais sobre um corpo K e seja $T : V \to V'$ uma aplicação linear. Dado um subespaço Z de V, mostre que:

(a) $T|_Z$ é injetora se e somente se $\mathrm{Ker}(T) \cap Z = \{0\}$;

(b) $T[Z] = \mathrm{Im}(T)$ se e somente se $V = \mathrm{Ker}(T) + Z$;

(c) $T|_Z : Z \to \mathrm{Im}(T)$ é um isomorfismo se e somente se $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus Z$.

Conclua a partir do item (c) que se W e Z são subespaços de V, $V = W \oplus Z$ e $q : V \to V/W$ denota a aplicação quociente, então $q|_Z : Z \to V/W$ é um isomorfismo.

Exercício 2. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K, W um subespaço de V e $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ uma base de V tal que $(e_1, \dots, e_k)$ seja uma base de W. Mostre que $(e_{k+1} + W, \dots, e_n + W)$ é uma base do espaço quociente V/W.

Exercício 3. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Mostre que existe um único isomorfismo $\overline{T} : V/\mathrm{Ker}(T) \to \mathrm{Im}(T)$ tal que $\overline{T} \circ q = T$, onde $q : V \to V/\mathrm{Ker}(T)$ denota a aplicação quociente.

Exercício 4. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K e W um subespaço de V. Seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $T[W] \subset W$.

(a) Mostre que existe um operador linear $\overline{T} : V/W \to V/W$ tal que $\overline{T} \circ q = q \circ T$, onde $q : V \to V/W$ denota a aplicação quociente.

(b) Seja $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ uma base de V tal que $(e_1, \dots, e_k)$ seja uma base de W. Considere a base $\overline{\mathcal{B}} = (e_{k+1} + W, \dots, e_n + W)$ de V/W. Mostre que a matriz $\big[\,\overline{T}\,\big]_{\overline{\mathcal{B}}}$ coincide com o bloco inferior direito de tamanho $(n-k) \times (n-k)$ da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$.

Exercício 5. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K e W um subespaço de V. Denote por $q : V \to V/W$ a aplicação quociente.

(a) Se Z é um subespaço de V que contém W, mostre que $q[Z] = Z/W$.

(b) Denote por $\mathfrak{S}(V, W)$ o conjunto dos subespaços de V que contém W e por $\mathfrak{S}(V/W)$ o conjunto dos subespaços de V/W. Defina:

$$\varphi : \mathfrak{S}(V, W) \longrightarrow \mathfrak{S}(V/W), \quad \psi : \mathfrak{S}(V/W) \longrightarrow \mathfrak{S}(V, W),$$

fazendo:

$$\varphi(Z) = q[Z] = Z/W,$$

para todo $Z \in \mathfrak{S}(V, W)$ e

$$\psi(Z') = q^{-1}[Z'],$$

para todo $Z' \in \mathfrak{S}(V/W)$. Mostre que φ e ψ são bijeções e que $\psi = \varphi^{-1}$.