Quarta Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk

19/03/2019

Exercício 1. Sejam U e V subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$ e $f : U \to V$ um difeomorfismo. Sejam W um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ que contenha U e $g : W \to \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável. Considere a função composta $h = g \circ f^{-1} : V \to \mathbb{R}^3$. Seja $p \in U$ e suponha que as matrizes Jacobianas de f e g no ponto p sejam dadas por:

$$Jf(p) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Jg(p) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcule:

(a) a matriz Jacobiana da função f^{-1} no ponto $q = f(p)$;

(b) a matriz Jacobiana da função h no ponto q.

Exercício 2. Sejam U e V subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$ e $f : U \to V$ um difeomorfismo. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto contendo 0 tal que $(\cos t, \operatorname{sen} t) \in V$ e $(e^t, e^t) \in U$ para todo $t \in I$ e considere a função $g : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f^{-1}(\cos t, \operatorname{sen} t) \cdot f(e^t, e^t),$$

para todo $t \in I$, em que $\vec{v} \cdot \vec{w}$ denota o produto escalar de dois vetores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Sabendo-se que

$$f(1,1) = (1,0) \quad \text{e} \quad Jf(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

calcule $g'(0)$.

Exercício 3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, x + y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Essa é a função que você estudou no Exercício 3 da segunda lista.

(a) Se $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denotam as funções coordenadas de f, esboce as curvas de nível de f_1 e f_2.

(b) Dados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, determine sob que condições vale a igualdade $f(x, y) = f(x', y')$.

(c) Quais são os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertencem a algum subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ em que f é injetora?

(d) Determine o subconjunto U de $\mathbb{R}^2$ formado pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em que a matriz Jacobiana $Jf(x, y)$ é inversível. Descreva o conjunto $f[U]$.

(e) Discuta a compatibilidade dos resultados que você obteve nos itens anteriores com o Teorema da Função Inversa.

Observação. As seguintes considerações serão úteis nos exercícios a seguir para o cálculo de matrizes inversas. Sejam A e B matrizes reais $n \times n$. Denote por $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ os vetores que aparecem nas linhas da matriz A e por $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$ os vetores que aparecem nas colunas da matriz B. É fácil ver que o elemento que aparece na linha i e coluna j da matriz AB é justamente o produto escalar de v_i por w_j. Segue daí que o produto AB é a matriz identidade (ou seja, que A é a inversa de B) se, e somente se

$$v_i \cdot w_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \tag{1}$$

para todos $i, j = 1, \ldots, n$. Assim, dada uma matriz B cujas colunas são vetores $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$, o problema de achar a matriz inversa B^{-1} é equivalente ao problema de encontrar vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo as equações (1). Os vetores v_i serão as linhas de B^{-1}. Há um caso particular em que é fácil de resolver as equações (1) que é o caso em que os vetores $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$ constituem uma *base ortogonal* de $\mathbb{R}^n$: isso significa que esses vetores são todos não nulos e mutuamente ortogonais, isto é, $w_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $w_i \cdot w_j = 0$ para $i, j = 1, \ldots, n$ com $i \neq j$. Nesse caso, os vetores v_i que satisfazem (1) são dados por:

$$v_i = \frac{w_i}{\|w_i\|^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Obtemos então um algorítmo simples para calcular a inversa de uma matriz cujas colunas formam uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$. No caso particular em que as colunas (ou as linhas) de uma matriz B forem uma *base ortonormal* de $\mathbb{R}^n$ (isto é, são mutuamente ortogonais e todas tem norma igual a 1), então a matriz inversa de B é simplesmente igual à matriz transposta de B.

Exercício 4. Considere a matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Verifique que as colunas de B formam uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

(b) Ache B^{-1}.

Exercício 5 (sistema de coordenadas polares)**.** Seja $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixado e considere os subconjuntos abertos $\widetilde{U}$ e U de $\mathbb{R}^2$ definidos por:

$$\widetilde{U} =]0, +\infty[\times]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\quad \text{e} \quad U = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(r\cos\theta_0, r\operatorname{sen}\theta_0) : r \geq 0\big\}.$$

Considere a função $\Psi : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ definida por

$$\Psi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta),$$

para todo $(r, \theta) \in \widetilde{U}$.

(a) Convença-se[1] de que Ψ é injetora e de que sua imagem é igual a U.

(b) Calcule a matriz Jacobiana de Ψ num ponto $(r, \theta) \in \widetilde{U}$ e verifique que seu determinante é igual a r.

(c) Conclua usando o Teorema da Função Inversa que $\Psi : \widetilde{U} \to U$ é um difeomorfismo cuja aplicação inversa $\Phi : U \to \widetilde{U}$ é de classe C^∞.

(d) Verifique que as colunas da matriz $J\Psi(r, \theta)$ formam uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, para todo $(r, \theta) \in \widetilde{U}$.

(e) Calcule a matriz Jacobiana de $\Phi = \Psi^{-1}$ num ponto $(x, y) = \Psi(r, \theta)$, para um $(r, \theta) \in \widetilde{U}$ dado arbitrariamente.

---

[1] Você pode escrever uma demonstração rigorosa desses fatos assumindo algumas propriedades elementares das funções trigonométricas. As propriedades relevantes são as seguintes: (i) dados $t, s \in \mathbb{R}$, temos $\cos(t) = \cos(s)$ e $\operatorname{sen}(t) = \operatorname{sen}(s)$ se, e somente se, $t - s$ é um múltiplo inteiro de 2π; (ii) dado um intervalo I da forma $[a, b[$ ou $]a, b]$ com $b - a = 2\pi$ e dado um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $x^2 + y^2 = 1$, então existe (um único) $t \in I$ tal que $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$. Eu acho mais importante aqui que você faça um desenho e entenda o que está acontecendo do que que você escreva uma demonstração cuidadosa, daí o "convença-se" em vez de "demonstre". Mas, obviamente, você pode também demonstrar.

Exercício 6 (sistema de coordenadas cilíndricas)**.** Seja $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixado e considere os subconjuntos abertos $\widetilde{U}$ e U de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$\widetilde{U} = \,]0,+\infty[\, \times \,]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\, \times \mathbb{R} \quad \text{e}$$
$$U = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(r\cos\theta_0, r\,\mathrm{sen}\,\theta_0, z) : r \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\big\}.$$

Considere a função $\Psi : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ definida por

$$\Psi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z),$$

para todo $(r,\theta,z) \in \widetilde{U}$.

(a) Convença-se de que Ψ é injetora e de que sua imagem é igual a U.

(b) Calcule a matriz Jacobiana de Ψ num ponto $(r,\theta,z) \in \widetilde{U}$ e verifique que seu determinante é igual a r.

(c) Conclua usando o Teorema da Função Inversa que $\Psi : \widetilde{U} \to U$ é um difeomorfismo cuja aplicação inversa $\Phi : U \to \widetilde{U}$ é de classe C^∞.

(d) Verifique que as colunas da matriz $J\Psi(r,\theta,z)$ formam uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, para todo $(r,\theta,z) \in \widetilde{U}$.

(e) Calcule a matriz Jacobiana de $\Phi = \Psi^{-1}$ num ponto

$$(x,y,z) = \Psi(r,\theta,z),$$

para um $(r,\theta,z) \in \widetilde{U}$ dado arbitrariamente.

Exercício 7 (sistemas de coordenadas esféricas)**.** Seja $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixado e considere os subconjuntos abertos $\widetilde{U}$ e U de $\mathbb{R}^3$ definidos por:

$$\widetilde{U} = \,]0,+\infty[\, \times \,]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\, \times \,]0,\pi[\quad \text{e}$$
$$U = \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(r\cos\theta_0, r\,\mathrm{sen}\,\theta_0, z) : r \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\big\}.$$

Considere a função $\Psi : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ definida por

$$\Psi(\rho,\theta,\phi) = (\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\phi),$$

para todo $(\rho,\theta,\phi) \in \widetilde{U}$.

(a) Convença-se de que Ψ é injetora e de que sua imagem é igual a U.

(b) Calcule a matriz Jacobiana de Ψ num ponto $(\rho,\theta,\phi) \in \widetilde{U}$ e verifique que seu determinante é igual a $-\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$.

(c) Conclua usando o Teorema da Função Inversa que $\Psi : \widetilde{U} \to U$ é um difeomorfismo cuja aplicação inversa $\Phi : U \to \widetilde{U}$ é de classe C^∞.

(d) Verifique que as colunas da matriz $J\Psi(\rho,\theta,\phi)$ formam uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, para todo $(\rho,\theta,\phi) \in \widetilde{U}$.

(e) Calcule a matriz Jacobiana de $\Phi = \Psi^{-1}$ num ponto

$$(x,y,z) = \Psi(\rho,\theta,\phi),$$

para um $(\rho,\theta,\phi) \in \widetilde{U}$ dado arbitrariamente.

Exercício* 8 (sistema de coordenadas adaptado a uma curva)**.** Sejam dados um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ e $\vec{v} : I \to \mathbb{R}^2$ funções de classe C^k, com $k \geq 1$ (você deve imaginar γ como uma curva parametrizada no plano e, para cada $t \in I$, $\vec{v}(t)$ como um vetor desenhado saindo do ponto $\gamma(t)$). Considere a função $\Psi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\Psi(t, s) = \gamma(t) + s\vec{v}(t),$$

para todo $t \in I$ e todo $s \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule a derivada parcial $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, 0)$, para todo $t \in I$, e a derivada parcial $\frac{\partial \Psi}{\partial s}(t, s)$, para todo $t \in I$ e todo $s \in \mathbb{R}$. Quais são as colunas da matriz Jacobiana de Ψ num ponto $(t, 0)$?

(b) Seja $t_0 \in I$ tal que os vetores $\gamma'(t_0)$ e $\vec{v}(t_0)$ sejam linearmente independentes. Verifique que a matriz Jacobiana de Ψ no ponto $(t_0, 0)$ é inversível.

(c) Sob as hipóteses do item (b), conclua que existe um subconjunto aberto U de $I \times \mathbb{R}$ contendo $(t_0, 0)$ tal que $\Psi|_U$ é injetora, $V = \Psi[U]$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo o ponto $\gamma(t_0)$ e a função $\Phi = (\Psi|_U)^{-1} : V \to \mathbb{R}^2$ é de classe C^k. Conclua que existe um intervalo aberto $J \subset I$ contendo t_0 tal que, para todo $t \in J$, vale que $\gamma(t) \in V$ e $\Phi\big(\gamma(t)\big) = (t, 0)$. O que você fez aqui foi construir um sistema de coordenadas Φ de classe C^k em torno do ponto $\gamma(t_0)$ no qual o pedaço $\gamma|_J$ da curva γ vira uma reta!

Exercício* 9. O objetivo deste exercício é mostrar que não existe[2] uma versão contínua da coordenada polar θ definida em todo o plano sem a origem, isto é, não existe uma função contínua $\theta : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$x = \sqrt{x^2 + y^2}\,\cos\bigl(\theta(x,y)\bigr) \quad \text{e} \quad y = \sqrt{x^2 + y^2}\,\operatorname{sen}\bigl(\theta(x,y)\bigr),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nos itens abaixo, assuma por absurdo que uma tal função exista.

(a) Considere a função contínua $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \theta(\cos t, \operatorname{sen} t),$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$. Verifique que $f(t) - t$ é um múltiplo inteiro de 2π, para todo $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Conclua que a função contínua $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f(t) - t,$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$, é constante.

(c) Verifique que $g(0) - g(2\pi) = 2\pi$ e obtenha uma contradição com o resultado do item (b), concluindo então que a função θ não existe.

[2]Quando formos usar coordenadas polares para cálculo de integrais duplas, veremos que essa dificuldade com a existência da coordenada polar θ não atrapalha, já que θ fica bem definida se retiramos do plano uma semireta saindo da origem. Como essa semireta não possui área, ela é irrelevante para integração. No entanto, há situações em que a inexistência da coordenada polar θ definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ atrapalha. Por exemplo, se você quiser descrever uma trajetória $\gamma : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no plano (aqui I é um intervalo e γ é contínua) em termos de coordenadas polares, você gostaria de ser capaz de encontrar coordenadas polares $r(t)$ e $\theta(t)$ para todo ponto $\gamma(t)$ com $t \in I$, sendo as funções r e θ contínuas no intervalo I. A trajetória γ poderia ficar dando voltas em torno da origem e cruzar todas as semiretas saindo da origem, de modo que aí jogar fora uma semireta vai criar problema. É possível mostrar, no entanto, que uma tal função contínua θ — que aqui é função do parâmetro da curva e não do ponto do plano — existe e que ela é de classe C^k se γ o for.

Sugestões

Exercício 3. (b) Note que $f(x,y) = f(x',y')$ se, e somente se, (x,y) e (x',y') pertencem ambos à interseção de uma curva de nível de f_1 com uma curva de nível de f_2.

Exercício 9. (a) Note que $\cos\big(f(t)\big) = \cos t$ e $\operatorname{sen}\big(f(t)\big) = \operatorname{sen} t$.

(b) Use o Teorema do Valor Intermediário (que implica que a imagem de g é um intervalo).

(c) Note que $f(0) = f(2\pi) = \theta(1,0)$.

Respostas

Exercício 1. (a) Temos:

$$J(f^{-1})(q) = \big(Jf(p)\big)^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Temos:

$$Jh(q) = Jg(p)J(f^{-1})(q) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 11 & -7 \\ -16 & 14 \end{pmatrix}.$$

Exercício 2. $g'(0) = \frac{49}{5}$.

Exercício 3. (a) As curvas de nível de f_1 são todos os círculos de centro na origem e também o conjunto unitário formado apenas pela origem (há também as curvas de nível negativo que são vazias). As curvas de nível de f_2 são as retas paralelas à reta de equação $y = -x$.

(b) Temos $f(x, y) = f(x', y')$ se, e somente se

$$(x', y') = (x, y) \quad \text{ou} \quad (x', y') = (y, x).$$

Geometricamente, f assume o mesmo valor em dois pontos distintos do plano se, e somente se, eles forem simétricos em relação à reta de equação $y = x$.

(c) São os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y \neq x$ (isto é, todos os pontos fora da reta de equação $y = x$).

(d) Temos

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e o determinante de $Jf(x, y)$ é igual a $2(x - y)$. Logo:

$$U = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\big\}.$$

O conjunto $f[U]$ é igual à região aberta circundada pela parábola $y^2 = 2x$ ou, mais precisamente:

$$f[U] = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < 2x\big\}.$$

(e) Temos que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $Jf(x, y)$ é inversível, vale que f é injetora em algum aberto contendo (x, y), como diz o Teorema da Função Inversa. Temos também que $f[U]$ é um conjunto aberto, como segue do Teorema da Função Inversa.

Exercício 4. (b) Temos:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{21} & -\frac{5}{42} & -\frac{1}{42} \end{pmatrix}.$$

Exercício 5. (b) A matriz Jacobiana de Ψ no ponto (r,θ) é igual a:

$$J\Psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

(e) Temos:

$$J\Phi(x,y) = \big(J\Psi(r,\theta)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exercício 6. (b) A matriz Jacobiana de Ψ no ponto (r,θ,z) é igual a:

$$J\Psi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Temos:

$$J\Phi(x,y,z) = \big(J\Psi(r,\theta,z)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta & \frac{1}{r}\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 7. (b) A matriz Jacobiana de Ψ no ponto (ρ,θ,ϕ) é igual a:

$$J\Psi(\rho,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,\phi\cos\theta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\,\mathrm{sen}\,\phi \end{pmatrix}.$$

(e) Temos:

$$J\Phi(x,y,z) = \big(J\Psi(\rho,\theta,\phi)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\,\phi\cos\theta & \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & \cos\phi \\ -\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\rho\,\mathrm{sen}\,\phi} & \frac{\cos\theta}{\rho\,\mathrm{sen}\,\phi} & 0 \\ \frac{1}{\rho}\cos\phi\cos\theta & \frac{1}{\rho}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{sen}\,\phi \end{pmatrix}.$$

Exercício 8. (a) Temos

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,0) = \gamma'(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Psi}{\partial s}(t,s) = \vec{v}(t),$$

para todo $t \in I$ e todo $s \in \mathbb{R}$. As colunas de $J\Psi(t,0)$ são justamente $\gamma'(t)$ e $\vec{v}(t)$.

(b) A matriz $J\Psi(t_0,0)$ é inversível pois suas colunas (que são $\gamma'(t_0)$ e $\vec{v}(t_0)$) são linearmente independentes.

(c) A existência de U com as propriedades requeridas segue diretamente do fato que Ψ é de classe C^k, do resultado do item (b) e do Teorema da Função Inversa. Como U é um aberto contendo $(t_0,0)$, existe um intervalo aberto J contendo t_0 tal que $(t,0) \in U$, para todo $t \in J$. Daí, para $t \in J$, temos que $\Psi(t,0) = \gamma(t)$ pertence a V e $\Phi\big(\gamma(t)\big) = (t,0)$.