Quarta Lista

MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk
21/04/2012

Exercício 1. Recorde que uma *seqüência* é uma função cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}^*$ dos números inteiros positivos. Uma *subseqüência* de uma seqüência x é uma seqüência da forma $x \circ \alpha$, onde $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ é uma função estritamente crescente (isto é, $\alpha(n) < \alpha(m)$ para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$). Mostre que se x é uma seqüência então uma subseqüência de uma subseqüência de x é novamente uma subseqüência de x.

Exercício 2. Uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ de números reais é dita *limitada* quando existe um número real $M \geq 0$ tal que $|x_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Mostre que uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ de números reais é limitada se e somente se existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercício 3. Mostre que toda seqüência convergente de números reais é limitada.

Exercício 4. Se $(x_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência limitada de números reais e $(y_n)_{n\geq 1}$ é uma seqüência de números reais que converge para zero, mostre que $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ também converge para zero.

Definição. Uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ de números reais é dita *crescente*[1] se $x_n \leq x_m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n \leq m$. A seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ é dita *decrescente* se $x_n \geq x_m$ para todos $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n \leq m$. Uma seqüência de números reais é dita *monótona* se for crescente ou decrescente.

Exercício 5. O objetivo deste exercício é demonstrar que toda seqüência de números reais[2] possui uma subseqüência monótona. Seja então $(x_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de números reais e considere o conjunto:

$$I = \big\{ n \in \mathbb{N}^* : \text{o conjunto } \{ m \in \mathbb{N}^* : x_m < x_n \} \text{ é finito} \big\}.$$

(a) Mostre que se o conjunto I é infinito então $(x_n)_{n\geq 1}$ admite uma subseqüência crescente $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $n_k \in I$, para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Mostre que se o conjunto I é finito então $(x_n)_{n\geq 1}$ admite uma subseqüência decrescente.

---

[1] Cüidado: no livro do Elon, a definição de seqüência crescente pede que $x_n < x_m$ para $n < m$. Nesse caso, nós diremos que a seqüência é *estritamente crescente*.

[2] Na verdade, o mesmo resultado vale para uma seqüência num conjunto arbitrário munido de uma relação de ordem total.