Quarta Lista

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

01/09/2018

Exercício 1. Seja A o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $0 \leq x \leq 3$ e y esteja entre $x^2 - 2x + 1$ e $-x^2 + 4x - 3$.

(a) Escreva uma fórmula para a área do conjunto A usando integrais.

(b) Use a fórmula que você escreveu no item (a) para calcular a área do conjunto A.

Exercício 2. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto definido por:

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \tfrac{\pi}{4} \text{ e } 0 \leq y \leq \sec^2 x\big\}.$$

(a) Considere o sólido obtido pela rotação de A em torno do eixo x. Escreva uma fórmula para o volume desse sólido usando integrais.

(b) Use a fórmula que você escreveu no item (a) para calcular o volume do sólido em questão.

(c) Considere o sólido obtido pela rotação de A em torno do eixo y. Escreva uma fórmula para o volume desse sólido usando integrais.

(d) Use a fórmula que você escreveu no item (c) para calcular o volume do sólido em questão.

Exercício 3. Considere o conjunto:

$$S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq e \ \text{ e } \ \ln x \leq y \leq 1\big\}.$$

(a) Assumindo uma distribuição uniforme de massa sobre S, escreva uma fórmula usando integrais para as coordenadas (x_C, y_C) do centro de massa de S.

(b) Determine x_C e y_C usando as fórmulas que você escreveu no item (a).

Exercício 4. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções tais que as integrais de Riemann $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ existam e tais que $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Considere o conjunto

$$S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } f(x) \leq y \leq g(x)\big\}$$

e seja $M > 0$. Assumindo uma distribuição uniforme de massa sobre S com massa total M, então o *momento de inércia* de S em relação ao eixo y é dado pelo integral

$$I = \frac{M}{A} \int_a^b x^2 \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x,$$

em que A denota a área de S (que assumimos ser não nula). Determine o momento de inércia de S em relação ao eixo y para:

$$S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi \text{ e } -\operatorname{sen} x \leq y \leq \operatorname{sen} x\big\}.$$

Exercício 5. Calcule os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,\mathrm{d}t$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{-x}^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercício 6. Decida em cada um dos itens abaixo se a integral imprópria dada é convergente ou divergente.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-\cos x}}\,\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\operatorname{sen}\Big(\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\Big|\operatorname{sen}\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big|\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x+\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$;

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(2+x^2)}\,\mathrm{d}x$;

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^3(2+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

Exercício* 7. Seja $f : [a,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ uma função tal que a integral de Riemann $\int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$ exista no sentido próprio, para todo $u \geq a$. Mostre que se a integral de Riemann imprópria $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ for convergente, então[1]:

$$\lim_{u,v\to+\infty}\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(Sugestão: $\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^v f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^u f(x)\,\mathrm{d}x$.)

[1]A recíproca dessa afirmação também vale, isto é, se $\lim_{u,v\to+\infty}\int_u^v f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, então a integral imprópria $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ será convergente. A demonstração dessa recíproca é mais complicada e usa algumas técnicas de análise (a saber, o fato que toda sequência de Cauchy de números reais é convergente).

Exercício* 8. Mostre que para todo $p \geq 0$, a integral imprópria

$$\int_0^{+\infty} x^p \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$$

não é convergente. (Sugestão: verifique que para todo número natural k vale que

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^p \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \geq (2k\pi)^p \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = 2(2k\pi)^p$$

e use o resultado do Exercício 7.)

Exercício* 9. [teorema fundamental do cálculo para primitiva contínua que falha num conjunto finito] Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que a integral de Riemann $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ exista no sentido próprio.

(a) Suponha que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua[2] tal que a derivada $F'(t)$ exista e seja igual a $f(t)$, para todo $t \in \,]a,b[$. Mostre que $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. (Sugestão: mostre que

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x) \, \mathrm{d}x$$

e depois use o Teorema Fundamental do Cálculo para integrar f no intervalo $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$.)

(b) Suponha que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua tal que a derivada $F'(t)$ exista e seja igual a $f(t)$ para todo $t \in [a,b]$, exceto possivelmente para t num subconjunto finito de $[a,b]$. Mostre que $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. (Sugestão: escreva

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

com os t_i escolhidos de modo que $F'(t) = f(t)$ para $t \notin \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ e use a igualdade $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x) \, \mathrm{d}x$ juntamente com o resultado do item (a).)

[2] Essa hipótese é crucial! Por que?

Exercício* 10. Vamos agora generalizar o resultado do item (b) do Exercício 9 para integrais impróprias. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função que possua um número finito de singularidades em $[a,b]$ e tal que a integral de Riemann $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ exista no sentido próprio para todo intervalo fechado $[c,d] \subset [a,b]$ que não contenha singularidades de f. Seja $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $F'(t)$ exista e seja igual a $f(t)$ para todo t em $[a,b]$, exceto possivelmente para t num subconjunto finito de $[a,b]$. Mostre que a integral de Riemann imprópria $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente e igual a $F(b) - F(a)$. (Sugestão: trate primeiro do caso em que só são permitidas singularidades de f nas extremidades de $[a,b]$ usando um argumento similar ao sugerido no item (a) do Exercício 9. Para o caso geral, argumente de modo similar ao sugerido no item (b) do Exercício 9 tomando agora os t_i como sendo as singularidades de f.)

Respostas

Exercício 1. (a) $\int_0^1 (2x^2 - 6x + 4)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 (2x^2 - 6x + 4)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (2x^2 - 6x + 4)\,\mathrm{d}x$; (b) $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{11}{3}$.

Exercício 2. (a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi \sec^4 x\,\mathrm{d}x$; (b) $\frac{4}{3}\pi$; (c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi x \sec^2 x\,\mathrm{d}x$; (d) $\frac{\pi^2}{2} - \pi \ln 2$.

Exercício 3. (a) $x_C = \frac{1}{A} \int_1^e x(1 - \ln x)\,\mathrm{d}x$ e $y_C = \frac{1}{A} \int_1^e \frac{1}{2}(1 - \ln^2 x)\,\mathrm{d}x$, em que $A = \int_1^e (1 - \ln x)\,\mathrm{d}x$; (b) $x_C = \frac{e^2-3}{4(e-2)}$ e $y_C = \frac{1}{2(e-2)}$.

Exercício 4. $I = \frac{M}{A} \int_0^\pi 2x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}(\pi^2 - 4)$, em que $A = \int_0^\pi 2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = 4$.

Exercício 5. (a) 1; (b) $\frac{1}{3}$; (c) 2; (d) 0.

Exercício 6. (a) convergente; (b) convergente; (c) divergente; (d) convergente; (e) divergente; (f) convergente.