Quarta Lista

MAT0112 – Vetores e Geometria

Prof. Daniel Victor Tausk
05/05/2018

Exercício 1. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3 e sejam $\vec{v} = (-1, 1, 2)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (1, 3, 2)_{\mathcal{B}}$. Determine os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ tais que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_1$ seja paralelo a $\vec{w}$ e $\vec{v}_2$ seja ortogonal a $\vec{w}$.

Exercício 2. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base de V^3.

(a) Mostre que se a base $\mathcal{B}$ for ortogonal, então

$$\vec{v} = \operatorname{proj}_{\vec{e}_1} \vec{v} + \operatorname{proj}_{\vec{e}_2} \vec{v} + \operatorname{proj}_{\vec{e}_3} \vec{v}, \tag{1}$$

para todo $\vec{v} \in V^3$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 6 da terceira lista.)

(b) Mostre que se a igualdade (1) for válida para todo $\vec{v} \in V^3$, então a base $\mathcal{B}$ será ortogonal. (Sugestão: use o fato que a igualdade (1) vale quando $\vec{v}$ é um vetor da base $\mathcal{B}$.)

Exercício 3. Sejam $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in V^3$ vetores não nulos e mutuamente ortogonais. Mostre que para todo $\vec{v} \in V^3$ o vetor

$$\vec{w} = \vec{v} - \big(\operatorname{proj}_{\vec{e}_1} \vec{v} + \operatorname{proj}_{\vec{e}_2} \vec{v}\big) \tag{2}$$

é ortogonal a $\vec{e}_1$ e a $\vec{e}_2$. Conclua que $\vec{w}$ também é ortogonal a um plano paralelo a $\vec{e}_1$ e a $\vec{e}_2$. Reciprocamente, mostre que se $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ forem vetores não nulos tais que (2) seja ortogonal a $\vec{e}_1$ e a $\vec{e}_2$ para todo $\vec{v} \in V^3$, então $\vec{e}_1$ será ortogonal a $\vec{e}_2$.

Exercício 4. Sejam $\mathcal{B}$ uma base de V^3, a um número real, $\vec{v}_1 = (1, a, 1)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v}_2 = (1, -1, 0)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v}_3 = (a, 1, 2)_{\mathcal{B}}$. Determine o conjunto formado pelos valores de a para os quais $\mathcal{C} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ seja uma base de V^3 com a mesma orientação que $\mathcal{B}$.

Exercício 5. Seja fixada uma orientação do espaço e seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal positiva de V^3. Determine o produto vetorial $\vec{v} \wedge \vec{w}$, em que $\vec{v} = (-1, 0, 2)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (1, 2, 3)_{\mathcal{B}}$.

Exercício 6. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3 e sejam dados pontos $O, A, B, C \in E^3$. Assumindo que

$$\overrightarrow{OA} = (-1, 2, 4)_{\mathcal{B}}, \quad \overrightarrow{OB} = (2, 3, -1)_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OC} = (3, 1, 1)_{\mathcal{B}},$$

determine a área do triângulo de vértices A, B e C.

Exercício 7. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3 e sejam $\vec{v} = (-1, 3, 2)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (1, 2, -3)_{\mathcal{B}}$. Assumindo que π seja um plano paralelo a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$, determine um vetor não nulo que seja ortogonal a π.

Exercício 8. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3 e seja π um plano paralelo aos vetores $\vec{v} = (1, 2, 1)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (-1, 1, 3)_{\mathcal{B}}$. Assumindo que $\vec{z} = (3, 1, 2)_{\mathcal{B}}$ e que $\vec{z} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$ com $\vec{z}_1$ paralelo a π e $\vec{z}_2$ normal a π, determine $\vec{z}_1$ e $\vec{z}_2$.

Respostas

Exercício 1. $\vec{v}_1 = \left(\frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \frac{6}{7}\right)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v}_2 = \left(-\frac{10}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{8}{7}\right)_{\mathcal{B}}$.

Exercício 4. $]-\infty, -1[$.

Exercício 5. $\vec{v} \wedge \vec{w} = (-4, 5, -2)_{\mathcal{B}}$.

Exercício 6. $\frac{1}{2}\sqrt{234} = \frac{3}{2}\sqrt{26}$.

Exercício 7. Qualquer múltiplo escalar não nulo de $(13, 1, 5)_{\mathcal{B}}$.

Exercício 8. $\vec{z}_1 = \left(\frac{13}{10}, \frac{59}{25}, \frac{49}{50}\right)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{z}_2 = \left(\frac{17}{10}, -\frac{34}{25}, \frac{51}{50}\right)_{\mathcal{B}}$.