Quarta Lista

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk

20/04/2013

Exercício 1. Usando as regras de derivação (e os resultados dados em aula a respeito das derivadas das funções seno e cosseno), verifique que:

(a) a derivada da função $f(x) = \operatorname{tg} x$ é $f'(x) = \sec^2 x$;
(b) a derivada da função $f(x) = \operatorname{cotg} x$ é $f'(x) = -\operatorname{cossec}^2 x$;
(c) a derivada da função $f(x) = \sec x$ é $f'(x) = \operatorname{tg} x \sec x$;
(d) a derivada da função $f(x) = \operatorname{cossec} x$ é $f'(x) = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x$.

Obtenha também os resultados dos itens (b) e (d) a partir dos resultados dos itens (a) e (c), respectivamente, usando a regra da cadeia e o fato que $\operatorname{cotg}(x) = \operatorname{tg}\big(\frac{\pi}{2} - x\big)$ e $\operatorname{cossec}(x) = \sec\big(\frac{\pi}{2} - x\big)$.

Exercício 2. Usando as regras de derivação[1], calcule a derivada da função:

$$f(x) = \frac{\cos\big(\operatorname{tg}(x^2 + 3x)\big) - \sqrt[7]{e^{x^3 + \sqrt{x}} + \ln(x^2 + 1)\operatorname{sen}(x^3 + x)}}{x^2 \cos(e^{3x})}.$$

Invente outras fórmulas esdrúxulas como essa e calcule a derivada das funções correspondentes. O objetivo do exercício é apenas praticar as regras de derivação, então não se preocupe em esclarecer qual é o domínio em que as fórmulas fazem sentido, nem em esclarecer se f é derivável em algum ponto x de seu domínio em que a fórmula obtida para $f'(x)$ não fizer sentido. (As regras de derivação garantem que a fórmula obtida para $f'(x)$ é de fato correta para aqueles x em que tanto a fórmula para $f(x)$ como para $f'(x)$ fizerem sentido. Pode ocorrer, no entanto, de f ser derivável em algum ponto x de seu domínio para o qual a fórmula obtida para $f'(x)$ usando as regras de derivação não faz sentido. Considere, por exemplo, f dada pela fórmula $f(x) = \sqrt{x^4}$. Como, na verdade, $f(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que f é derivável em todo ponto. No entanto, uma aplicação cega das regras de derivação na fórmula $\sqrt{x^4}$ nos dá $\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4}}$, que não faz sentido em $x = 0$.)

Exercício 3. Sejam $f : D \to \left]0, +\infty\right[$, $g : D \to \mathbb{R}$ funções, com $D \subset \mathbb{R}$. Seja $a \in D$ um ponto de acumulação de D e suponha que f e g sejam deriváveis no ponto a. Mostre que a função $h : D \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x)^{g(x)}$, para todo $x \in D$, é derivável no ponto a e determine uma fórmula para $h'(a)$ em termos de $f(a)$, $g(a)$, $f'(a)$ e $g'(a)$.

---

[1] Use livremente o fato que a derivada de $g(x) = \sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$ é $g'(x) = \frac{1}{7}\, x^{\frac{1}{7} - 1}$, também para $x < 0$, apesar do fato que essa regra só foi mostrada em aula para $x > 0$. A regra vale também para $x < 0$, como será esclarecido no Exercício 6 abaixo.

Exercício 4. Dado um número real α, considere a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^\alpha$, para $x > 0$, e $f(0) = 0$. Usando a definição de derivada, verifique que:

(a) se $\alpha > 1$ então f é derivável em 0 e $f'(0) = 0$;
(b) se $\alpha = 1$ então f é derivável em 0 e $f'(0) = 1$;
(c) se $\alpha < 1$ então f não é derivável em 0.

Exercício 5. Seja $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto simétrico em relação à origem (isto é, se $x \in D$ então $-x \in D$) e seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que a função f é *par* se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in D$, e que a função f é *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in D$. Seja $a \in D$ um ponto de acumulação de D. Mostre que:

(a) se f é par e é derivável no ponto a então f é derivável no ponto $-a$ e $f'(-a) = -f'(a)$;
(b) se f é ímpar e é derivável no ponto a então f é derivável no ponto $-a$ e $f'(-a) = f'(a)$.

Conclua que a derivada de uma função par derivável é uma função ímpar e que a derivada de uma função ímpar derivável é uma função par.

Observação: você pode mostrar os itens (a) e (b) tanto usando a regra da cadeia, quanto diretamente usando a definição de derivada!

Exercício* 6. Em aula, foi mostrado que se α é um número real qualquer então a função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^\alpha$, para todo $x > 0$, é derivável e que vale a "regra do tombo":

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0. \tag{1}$$

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrário, não definimos x^α para $x \leq 0$. No entanto, para alguns valores de α, podemos dar uma definição razoável para a expressão x^α mesmo quando $x \leq 0$ (ou $x < 0$) e o objetivo deste exercício é mostrar que a fórmula $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ também vale para $x \leq 0$ (ou $x < 0$) nesses casos.

Suponha que $\alpha = \frac{p}{q}$, onde p, q são inteiros e q é ímpar. Nesse caso, definimos[2]:

$$x^\alpha = \sqrt[q]{x^p}, \tag{2}$$

para todo $x \neq 0$. A fórmula (2) também define x^α para $x = 0$, se p, q são positivos. Considere a função f definida por $f(x) = x^\alpha$, com domínio $D = \mathbb{R}$, se $p, q > 0$, e com domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, caso contrário. Usando (1) e o resultado do Exercício 5, mostre que a fórmula $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ vale para todo $x \neq 0$. Segue do resultado do Exercício 4 que essa fórmula vale também para $x = 0$, caso $p > q > 0$.

[2] O lado direito da igualdade (2) não depende da escolha da representação de α como uma fração $\frac{p}{q}$, desde que exijamos que q seja ímpar. Essa exigência é de fato importante. Por exemplo, para $\alpha = \frac{1}{3}$, temos $x^\alpha = \sqrt[3]{x}$, mas se usássemos a representação $\alpha = \frac{p}{q}$ com $p = 2$, $q = 6$, obteríamos $\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{|x|} \neq \sqrt[3]{x}$.