Terceira Lista

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk

14/04/2018

Exercício 1. Um *espaço de probabilidade* é uma tripla $(X, \mathcal{A}, P)$, em que X é um conjunto, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X e $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ é uma medida σ-aditiva tal que $P(X) = 1$. Nesse contexto, os elementos de $\mathcal{A}$ são chamados *eventos*. Dois eventos $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ são ditos *independentes* se $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$. Seja $\mathcal{C}$ um subconjunto de $\mathcal{A}$ fechado por interseções finitas e seja $E \in \mathcal{A}$. Mostre que se E é independente de todo elemento de $\mathcal{C}$, então E é independente de todo elemento da σ-álgebra de subconjuntos de X gerada por $\mathcal{C}$.

Exercício 2. Sejam X um espaço topológico e Y um subconjunto de X munido da topologia induzida de X. Mostre que a σ-álgebra de Borel de Y é dada por:

$$\mathcal{B}(Y) = \big\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}(X)\big\}.$$

Exercício 3. Seja X um espaço topológico e seja $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0, +\infty]$ uma medida σ-aditiva definida na σ-álgebra de Borel de X. Um Boreleano $B \in \mathcal{B}(X)$ é dito *regular*[1] para μ se para todo $\varepsilon > 0$ existem um fechado F de X e um aberto U de X tais que $F \subset B \subset U$, $\mu(B \setminus F) < \varepsilon$ e $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$.

(a) Mostre que, se μ é finita, então o conjunto dos Boreleanos que são regulares para μ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X.

(b) Suponha que todo aberto de X seja uma união enumerável de fechados (esse é o caso, por exemplo, se X for metrizável). Mostre que, se μ é finita, então todo Boreleano de X é regular para μ.

(c) Suponha que todo aberto de X seja uma união enumerável de fechados e que X seja igual a uma união enumerável de abertos de medida finita. Mostre que todo Boreleano de X é regular para μ. (Sugestão: primeiro mostre que dado um Boreleano B de X e dado $\varepsilon > 0$, existe um aberto U de X contendo B com $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$. Em seguida, aplique esse resultado para o complementar de B em X.)

[1] A definição de medida regular em um espaço topológico varia de um livro para outro, então não levem essa terminologia muito a sério. Uma noção útil é a seguinte. Se X é um espaço topológico localmente compacto Hausdorff, então uma medida μ definida nos Boreleanos de X é dita *regular* se valem as seguintes condições: (a) para todo Boreleano B de X, a medida de B é igual ao ínfimo das medidas dos abertos que contém B; (b) para todo aberto U de X, a medida de U é igual ao supremo das medidas dos compactos contidos em U; (c) a medida de todo subconjunto compacto de X é finita. As condições (a) e (b) implicam que, se B é um Boreleano de X de medida finita, então a medida de B é igual ao supremo das medidas dos compactos contidos em B. Essa definição é interessante porque, com ela, vale que há uma bijeção — definida usando integração — entre as medidas regulares nos Boreleanos de X e os funcionais lineares positivos no espaço $C_{\mathrm{c}}(X)$ das funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$ de suporte compacto.

Exercício 4. Recorde que um espaço métrico é dito *totalmente limitado* se para todo $\varepsilon > 0$, o espaço puder ser escrito como uma união finita de subconjuntos de diâmetro menor do que ε. Um subconjunto de um espaço métrico é dito totalmente limitado se for um espaço métrico totalmente limitado, munido da métrica induzida. Seja M um espaço métrico e seja $\mu : \mathcal{B}(M) \to [0, +\infty[$ uma medida finita e σ-aditiva definida na σ-álgebra de Borel de M. Suponha que M seja separável.

(a) Dados $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$, mostre que existe um subconjunto F de M que seja uma união finita de bolas fechadas de raio ε e tal que $\mu(M \setminus F) < \eta$.

(b) Dado $\eta > 0$, mostre que existe um subconjunto fechado e totalmente limitado K de M tal que $\mu(M \setminus K) < \eta$. (Recorde que um espaço métrico é compacto se, e somente se, for completo e totalmente limitado. Assim, esse K será compacto se M for completo.)

(c) Seja N um espaço métrico completo tal que $M \subset N$ e tal que a métrica de M seja induzida da métrica[2] de N. Suponha que M seja um Boreleano de N. Mostre que para todo $\eta > 0$, existe um compacto $K \subset M$ tal que $\mu(M \setminus K) < \eta$. (Sugestão: trocando N pelo fecho de M, podemos supor sem perda de generalidade que N seja separável. Estenda μ a uma medida $\bar{\mu}$ nos Boreleanos de N fazendo $\bar{\mu}(B) = \mu(B \cap M)$, para todo Boreleano B de N. Use o resultado do item (b) acima para a medida $\bar{\mu}$ e o resultado do item (b) do Exercício 3 para o Boreleano M de N.)

[2] Por exemplo, N pode ser o completamento de M. Na verdade, só será relevante que a métrica de M seja equivalente à métrica induzida da métrica de N.