# Terceira Lista

**MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V**

Prof. Daniel Victor Tausk

24/08/2013

Recordemos algumas definições dadas em aula.

**Definição 1.** Sejam $(M, d)$ um espaço métrico e $A$ um subconjunto de $M$. Dizemos que $x \in M$ é um *ponto interior* de $A$ se existe $r > 0$ tal que $\mathrm{B}(x, r) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores de $A$ (chamado o *interior* de $A$) é denotado por $\mathrm{int}(A)$. Dizemos que $x \in M$ é um *ponto de aderência* de $A$ se para todo $r > 0$ temos $A \cap \mathrm{B}(x, r) \neq \emptyset$. O conjunto dos pontos de aderência de $A$ (chamado o *fecho* de $A$) é denotado por $\overline{A}$. Dizemos que $x \in M$ é um *ponto de fronteira* de $A$ se para todo $r > 0$ temos $A \cap \mathrm{B}(x, r) \neq \emptyset$ e $A^{\mathrm{c}} \cap \mathrm{B}(x, r) \neq \emptyset$ (onde $A^{\mathrm{c}} = M \setminus A$). O conjunto dos pontos de fronteira de $A$ (chamado a *fronteira* de $A$) é denotado por $\partial A$.

**Definição 2.** Sejam $(M, d)$ um espaço métrico e $A$ um subconjunto de $M$. Dizemos que $A$ é *aberto* se $A \subset \mathrm{int}(A)$, ou, equivalentemente, se $\mathrm{int}(A) = A$ (já que, obviamente, vale sempre que $\mathrm{int}(A) \subset A$). Dizemos que $A$ é *fechado* se $\overline{A} \subset A$, ou, equivalentemente, se $\overline{A} = A$ (já que, obviamente, vale sempre que $A \subset \overline{A}$).

Vimos em aula que se $(M, d)$ é um espaço métrico e $A \subset M$ então:

(a) $M$ é união disjunta de $\mathrm{int}(A)$, $\partial A$ e $\mathrm{int}(A^{\mathrm{c}})$;

(b) $\mathrm{int}(A^{\mathrm{c}}) = \overline{A}^{\,\mathrm{c}}$ e $\big(\mathrm{int}(A)\big)^{\mathrm{c}} = \overline{A^{\mathrm{c}}}$;

(c) $\overline{A} = \mathrm{int}(A) \cup \partial A$;

(d) $A$ é fechado se e somente se $A^{\mathrm{c}}$ é aberto;

(e) $A$ é aberto se e somente se $A^{\mathrm{c}}$ é fechado;

(f) para $x \in M$, $r > 0$, a bola aberta $\mathrm{B}(x, r)$ é um conjunto aberto e a bola fechada $\mathrm{B}[x, r]$ é um conjunto fechado;

(g) $\emptyset$ e $M$ são abertos e fechados;

(h) a união de uma família arbitrária de abertos é aberta e a interseção de dois abertos é aberta;

(i) a interseção de uma família (não vazia) arbitrária de fechados é fechada e a união de dois fechados é fechada;

(j) um subconjunto unitário (e, portanto, um subconjunto finito) de $M$ é fechado.

**Exercício 1.** Sejam $(M, d)$ um espaço métrico e $A$, $B$ subconjuntos de $M$. Mostre que:

(a) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}(B)$;

(b) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

Conclua que todo aberto contido em $A$ está contido em $\mathrm{int}(A)$ e que todo fechado que contém $A$ contém $\overline{A}$.

Como corolário do resultado do Exercício 1 e do fato que bolas abertas são abertas, obtivemos em aula que o interior de um conjunto $A$ é sempre um conjunto aberto (assim, o interior de $A$ é o maior conjunto aberto contido em $A$). Segue daí (levando em conta que o complementar de $\overline{A}$ é $\mathrm{int}(A^{\mathrm{c}})$) que o fecho de um conjunto $A$ é sempre fechado (assim, o fecho de $A$ é o menor conjunto fechado que contém $A$).

**Exercício 2.** Seja $(M, d)$ um espaço métrico. Mostre que:

(a) se $U \subset M$ é aberto e $F \subset M$ é fechado então $U \setminus F$ é aberto e $F \setminus U$ é fechado;

(b) para todos $x \in M$, $r > 0$, a *esfera*:

$$S(x, r) = \big\{y \in M : d(y, x) = r\big\} = \mathrm{B}[x, r] \setminus \mathrm{B}(x, r)$$

é um conjunto fechado;

(c) para todo $A \subset M$, $\partial A$ é fechado;

(d) para todo $A \subset M$, $\mathrm{int}(A) = A \setminus \partial A$;

(e) para todo $A \subset M$, $\overline{A} = A \cup \partial A$;

(f) para todo $A \subset M$, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^{\mathrm{c}}}$;

(g) para todo $A \subset M$, $\partial A = \partial(A^{\mathrm{c}})$.

**Exercício 3.** Sejam $(M, d)$ um espaço métrico e $A \subset M$. Mostre que $A$ é aberto se e somente se $A \cap \partial A = \emptyset$ e que $A$ é fechado se e somente se $\partial A \subset A$. Conclua que $A$ é ao mesmo tempo aberto e fechado se e somente se $\partial A = \emptyset$.

**Exercício 4.** Sejam $(M, d)$ um espaço métrico e $A$, $B$ subconjuntos de $M$.

(a) Mostre que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(b) Mostre que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ e dê exemplo, com $M = \mathbb{R}$ munido da métrica usual, em que a igualdade não vale.

(c) Mostre que $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)$.

(d) Mostre que $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \subset \mathrm{int}(A \cup B)$ e dê exemplo, com $M = \mathbb{R}$ munido da métrica usual, em que a igualdade não vale.

**Exercício 5.** Seja $(M, d)$ um espaço métrico. Mostre que se $U \subset M$ é aberto então $\partial U$ tem interior vazio. Com $M = \mathbb{R}$ munido da métrica usual, dê exemplo de um subconjunto $A$ de $M$ tal que $\partial A = M$.

**Exercício 6.** Seja $(M, d)$ um espaço métrico. Mostre que se $U \subset M$ é aberto então $U \subset \mathrm{int}\big(\overline{U}\big)$. Dê exemplo, com $M = \mathbb{R}$ munido da métrica usual, em que a igualdade não vale.

**Definição 3.** Seja $(M, d)$ um espaço métrico. Uma *vizinhança* de um ponto $x \in M$ é um subconjunto $V$ de $M$ tal que $x \in \mathrm{int}(V)$.

**Exercício 7.** Sejam $(M, d)$ um espaço métrico, $(x_n)_{n \geq 1}$ uma seqüência em $M$ e $x \in M$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) $x_n \longrightarrow x$;

(b) para toda vizinhança $V$ de $x$, existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$;

(c) para todo aberto $U$ com $x \in U$, existe $n_0 \geq 1$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$.

**Exercício 8.** Sejam $(M, d)$, $(N, d')$ espaço métricos, $f : M \to N$ uma função e $x \in M$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) $f$ é contínua no ponto $x$;

(b) para toda vizinhança $V \subset N$ de $f(x)$, existe uma vizinhança $W \subset M$ de $x$ tal que $f[W] \subset V$;

(c) para todo aberto $V \subset N$ contendo $f(x)$, existe um aberto $W \subset M$ contendo $x$ tal que $f[W] \subset V$.