Terceira Lista

MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk

01/04/2014

O objetivo desta lista é ajudar xs alunxs a se familiarizarem com os aspectos mais conjuntistas da teoria de relações de equivalência. Não há nenhum exercício de Álgebra Linear nesta lista. Exercícios puramente conjuntistas não serão cobrados na prova.

Definição 1. Uma *relação de equivalência* num conjunto X é uma relação binária $\sim$ em X satisfazendo as seguintes condições:

(a) para todo $x \in X$, $x \sim x$ (reflexividade);
(b) para todos $x, y \in X$, se $x \sim y$ então $y \sim x$ (simetria);
(c) para todos $x, y, z \in X$, se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $x \sim z$ (transitividade).

Se $\sim$ é uma relação de equivalência em X, então a *classe de equivalência* de um elemento $x \in X$ (com respeito à relação de equivalência $\sim$) é o subconjunto $[x]$ de X definido por:

$$[x] = \big\{ y \in X : x \sim y \big\}.$$

Observação 1. Vimos em aula que se $\sim$ é uma relação de equivalência num conjunto X então, para todos $x, y \in X$, vale que:

$$[x] = [y] \Longleftrightarrow x \sim y.$$

Definição 2. Se $\sim$ é uma relação de equivalência num conjunto X, então o *conjunto quociente* $X/{\sim}$ é o conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por $\sim$, ou seja:

$$X/{\sim} = \big\{ [x] : x \in X \big\}.$$

Definição 3. Uma *partição* de um conjunto X é uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos não vazios de X tal que:

(a) $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ (isto é, para todo $x \in X$, existe $A \in \mathcal{A}$ com $x \in A$);
(b) para todos $A, B \in \mathcal{A}$, se $A \neq B$ então $A \cap B = \emptyset$.

Observação 2. Vimos em aula que se $\sim$ é uma relação de equivalência num conjunto X então $\mathcal{A} = X/{\sim}$ é uma partição de X.

Definição 4. Se $\mathcal{A}$ é uma partição de um conjunto X então a relação binária $\sim$ em X definida por:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{existe } A \in \mathcal{A} \text{ com } x, y \in A,$$

é uma relação de equivalência (verifique!) e é chamada a *relação de equivalência determinada pela partição $\mathcal{A}$ de X*.

Observação 3. Vimos em aula que se $\sim$ é uma relação de equivalência em X e se $\mathcal{A} = X/\!\sim$ então $\sim$ coincide com a relação de equivalência determinada pela partição $\mathcal{A}$ de X.

Exercício 1. Se $\mathcal{A}$ é uma partição de um conjunto X e se $\sim$ é a relação de equivalência em X determinada por $\mathcal{A}$, mostre que $\mathcal{A} = X/\!\sim$.

Observação 4. Seja X um conjunto. Denote por $\mathrm{Part}(X)$ o conjunto de todas as partições de X e por $\mathrm{Eq}(X)$ o conjunto de todas as relações de equivalência em X. Considere a função $\varphi : \mathrm{Part}(X) \to \mathrm{Eq}(X)$ que a cada partição $\mathcal{A}$ de X associa a relação de equivalência $\sim$ em X determinada por $\mathcal{A}$. Considere também a função $\psi : \mathrm{Eq}(X) \to \mathrm{Part}(X)$ que a cada relação de equivalência $\sim$ em X associa a partição $X/\!\sim$ de X. Note que a Observação 3 diz que a composição $\varphi \circ \psi$ é a aplicação identidade de $\mathrm{Eq}(X)$ e que o resultado do Exercício 1 diz que a composição $\psi \circ \varphi$ é a aplicação identidade de $\mathrm{Part}(X)$. Assim, as aplicações φ e ψ são ambas bijeções e $\psi = \varphi^{-1}$. Em outras palavras, relações de equivalências e partições são "dois lados da mesma moeda": relações de equivalência definem partições, partições definem relações de equivalência, e essa correspondência entre partições e relações de equivalência é biunívoca.

Definição 5. Seja $f : X \to U$ uma função. A relação binária $\sim$ em X definida por:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y),$$

é uma relação de equivalência (verifique!) e é chamada a *relação de equivalência determinada pela função f*.

Exercício 2. Se $f : X \to U$ é uma função e $\sim$ é a relação de equivalência determinada por f, mostre que o conjunto quociente $X/\!\sim$ é dado por:

$$X/\!\sim\; = \big\{ f^{-1}(u) : u \in \mathrm{Im}(f) \big\},$$

isto é, $X/\!\sim$ é a coleção dos conjuntos de nível de f.

Definição 6. Se $\sim$ é uma relação de equivalência num conjunto X, então a função $q : X \to X/\!\sim$ definida por:

$$q(x) = [x], \quad x \in X,$$

é chamada a *aplicação quociente* associada à relação de equivalência $\sim$. A aplicação quociente é obviamente sobrejetora.

Observação 5. Note que a relação de equivalência determinada pela aplicação quociente $q : X \to X/\!\sim$ (no sentido da Definição 5) é precisamente a relação de equivalência $\sim$, já que:

$$q(x) = q(y) \iff [x] = [y] \iff x \sim y,$$

para todos $x, y \in X$. Segue então que toda relação de equivalência é determinada por uma função. No entanto, funções diferentes podem definir a mesma relação de equivalência (veja o Exercício 7).

Os próximos exercícios tratam do assunto de definição de funções por passagem ao quociente.

Exercício 3. Sejam $f : X \to U$ uma função, $\sim$ uma relação de equivalência em X e denote por $q : X \to X/{\sim}$ a aplicação quociente. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) existe uma função $\bar{f} : X/{\sim} \to U$ tal que $\bar{f} \circ q = f$;

(b) a relação de equivalência $\sim$ está contida na relação de equivalência determinada por f, isto é, para todos $x, y \in X$, se $x \sim y$ então $f(x) = f(y)$;

(c) f é constante nas classes de equivalência determinadas por $\sim$, isto é, para qualquer $A \in X/{\sim}$, a função $f|_A$ é constante;

Mostre que se existe uma função $\bar{f} : X/{\sim} \to U$ tal que $\bar{f} \circ q = f$, então ela é única. Dizemos que $\bar{f}$ é obtida de f *por passagem ao quociente.*

Exercício 4. Sejam $f : X \to U$ uma função, $\sim$ uma relação de equivalência em X e denote por $q : X \to X/{\sim}$ a aplicação quociente. Assuma que f passa ao quociente, isto é, que existe uma (única) função $\bar{f} : X/{\sim} \to U$ tal que $\bar{f} \circ q = f$. Mostre que:

(a) a função $\bar{f}$ é injetora se e somente se a relação de equivalência determinada por f coincide com $\sim$;

(b) as funções f e $\bar{f}$ possuem a mesma imagem.

Conclua que quando $\sim$ é a relação de equivalência determinada por f então $\bar{f}$ é uma bijeção entre $X/{\sim}$ e $\mathrm{Im}(f)$.

Os enunciados dos Exercícios 3 e 4 podem ser adaptados facilmente para a situação em que a aplicação q é uma aplicação sobrejetora qualquer, e não necessariamente a aplicação quociente determinada por uma relação de equivalência. Esse é o conteúdo dos Exercícios 5 e 6 a seguir.

Exercício 5. Sejam $f : X \to U$ uma função e $q : X \to Z$ uma função sobrejetora. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) existe uma função $\bar{f} : Z \to U$ tal que $\bar{f} \circ q = f$;

(b) a relação de equivalência determinada por q está contida na relação de equivalência determinada por f, isto é, para todos $x, y \in X$, se $q(x) = q(y)$ então $f(x) = f(y)$;

(c) f é constante nos conjuntos de nível de q, isto é, para todo $z \in Z$, temos que a função $f|_{q^{-1}(z)}$ é constante.

Mostre que se existe uma função $\bar{f} : Z \to U$ tal que $\bar{f} \circ q = f$, então ela é única[1]. Dizemos que $\bar{f}$ é obtida de f *por passagem ao quociente* através da aplicação q.

[1]Na verdade, a sobrejetividade de q é necessária apenas para a unicidade de $\bar{f}$. A equivalência entre (a), (b) e (c) vale mesmo que q não seja sobrejetora, exceto no caso degenerado em que X e U são vazios, mas Z não é vazio.

Exercício 6. Sejam $f : X \to U$ uma função e $q : X \to Z$ uma função sobrejetora. Assuma que f passa ao quociente através da aplicação q, isto é, que existe uma (única) função $\bar{f} : Z \to U$ tal que $\bar{f} \circ q = f$. Mostre que:

(a) a função $\bar{f}$ é injetora se e somente se a relação de equivalência determinada por f coincide com a relação de equivalência determinada por q;

(b) as funções f e $\bar{f}$ possuem a mesma imagem.

Conclua que quando f e q determinam a mesma relação de equivalência então $\bar{f}$ é uma bijeção entre Z e $\mathrm{Im}(f)$.

Exercício 7. Sejam $f : X \to U$, $g : X \to V$ funções sobrejetoras. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) existe uma função bijetora $\phi : V \to U$ tal que $\phi \circ g = f$;

(b) f e g determinam a mesma relação de equivalência em X.

(Sugestão: para mostrar que (b) implica (a), obtenha $\phi = \bar{f}$ passando f ao quociente através de $q = g$. Use o resultado dos Exercícios 5 e 6.)