Terceira Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk
13/03/2019

Exercício 1. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^3$ uma função definida num subconjunto U de $\mathbb{R}^4$, $g : V \to \mathbb{R}^5$ uma função definida num subconjunto V de $\mathbb{R}^3$ que contém a imagem de f e $h = g \circ f : U \to \mathbb{R}^5$ a função composta. Seja p um ponto interior de U tal que $f(p)$ seja um ponto interior de V. Suponha que f seja diferenciável no ponto p, que g seja diferenciável no ponto $f(p)$ e que as matrizes Jacobianas de f e g nesses pontos sejam dadas por:

$$Jf(p) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Jg\big(f(p)\big) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a matriz Jacobiana de h no ponto p.

(b) Determine a derivada parcial na segunda variável da quarta função coordenada de h no ponto p, isto é, calcule $(\partial_2 h_4)(p)$.

(c) Determine a derivada parcial na terceira variável de h no ponto p, isto é, calcule $(\partial_3 h)(p)$.

(d) Determine o gradiente no ponto p da quinta função coordenada da função h.

(e) Determine a derivada direcional $\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p)$, em que $\vec{v} = (2, 1, -1, 4)$.

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável e suponha que:

$$Jf(1,0,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Jf(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere as curvas parametrizadas $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$\gamma(t) = f(t^3, t-1, t+t^2) \quad \text{e} \quad \mu(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t, e^t) + (t^2+1) f(t+1, t, t^2+2),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Calcule $\gamma'(1)$ e $\mu'(0)$.

Exercício 3. Seja $f : U \to \mathbb{R}^4$ uma função diferenciável num ponto p que está no interior de um subconjunto U de $\mathbb{R}^3$. Suponha que a matriz Jacobiana de f no ponto p seja dada por:

$$Jf(p) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine quais são os vetores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tais que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p) = (6, 4, 3, 9)$.

Exercício 4. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função definida num subconjunto U de $\mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^p$ uma função definida num subconjunto V de $\mathbb{R}^n$ que contém a imagem de f e seja $h = g \circ f$. Suponha que x seja um ponto interior de U, $f(x)$ seja um ponto interior de V, f seja diferenciável no ponto x e g seja diferenciável no ponto $f(x)$. Verifique que

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(x) = Jg\big(f(x)\big)\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x),$$

para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$, em que na fórmula acima o vetor $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x) \in \mathbb{R}^n$ é escrito como matriz coluna.

Nos próximos exercícios você pode usar livremente os seguintes fatos, vistos em Cálculo II:

(A) se duas funções a valores reais são diferenciáveis num ponto, então seu produto é diferenciável nesse ponto.

(B) Se duas funções a valores reais são de classe C^k, então seu produto é de classe C^k.

(C) Sejam $I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ um ponto de acumulação de I e $f : I \to \mathbb{R}^m$ e $g : I \to \mathbb{R}^n$ funções deriváveis no ponto t_0. Se $m = 1$, então a função $h : I \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$h(t) = f(t)g(t),$$

para todo $t \in I$, é derivável em t_0 e sua derivada é dada por:

$$h'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0).$$

Se $m = n$, então a função $h : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(t) = f(t) \cdot g(t),$$

para todo $t \in I$, é derivável em t_0 e sua derivada é dada por:

$$h'(t_0) = f'(t_0) \cdot g(t_0) + f(t_0) \cdot g'(t_0).$$

Se $m = n = 3$, então a função $h : I \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$h(t) = f(t) \wedge g(t),$$

para todo $t \in I$, é derivável em t_0 e sua derivada é dada por:

$$h'(t_0) = f'(t_0) \wedge g(t_0) + f(t_0) \wedge g'(t_0).$$

Observação. Note que, em todos os casos considerados no item (C) acima, a função h é uma espécie de "produto" de f por g: no primeiro caso, o "produto" é o produto de escalar por vetor; no segundo caso, o "produto" é o produto escalar de vetores e no terceiro caso o "produto" é o produto vetorial de vetores. Em todos os casos, segue que h é derivável no ponto t_0 e que sua derivada é dada por uma "regra do produto" do tipo "derivada da primeira pela segunda mais a primeira pela derivada da segunda". O que há de comum a todos esses "produtos" que faz essa regra valer? A resposta é que todos eles são *operações bilineares*. Uma função $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é dita *bilinear* quando for linear separadamente em cada uma de suas duas variáveis, isto é, quando

$$B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w) \quad \text{e} \quad B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$$

para todos $v_1, v_2, v \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v, w_2) \quad \text{e} \quad B(v, \lambda w) = \lambda B(v, w)$$

para todos $v \in \mathbb{R}^m$, $w_1, w_2, w \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Nas condições do item (C), vale que se B é bilinear e definimos h por

$$h(t) = B\big(f(t), g(t)\big),$$

para todo $t \in I$, então h é derivável em t_0 e vale a regra do produto:

$$h'(t_0) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big) + B\big(f(t_0), g'(t_0)\big).$$

Outro exemplo importante de operação bilinear é a multiplicação de matrizes. Os resultados que aparecem nos exercícios subsequentes podem ser generalizados para quaisquer operações bilineares.

Exercício 5. Sejam $f : U \to \mathbb{R}$ e $g : U \to \mathbb{R}^n$ funções definidas num subconjunto U de $\mathbb{R}^m$ e seja p_0 um ponto interior de U. Suponha que f e g sejam diferenciáveis no ponto p_0. Considere a função $h : U \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$h(p) = f(p)g(p),$$

para todo $p \in U$.

(a) Verifique que h é diferenciável no ponto p_0.

(b) Verifique que se f e g são de classe C^k, então h é de classe C^k.

(c) Verifique que

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0)g(p_0) + f(p_0)\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(p_0),$$

para todo vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$.

(d) Verifique que

$$Jh(p_0) = g(p_0)Jf(p_0) + f(p_0)Jg(p_0),$$

em que na fórmula acima o vetor $g(p_0) \in \mathbb{R}^n$ deve ser escrito como uma matriz coluna. Note que se $n = 1$, então essa igualdade se reduz à fórmula:

$$\nabla h(p_0) = g(p_0)\nabla f(p_0) + f(p_0)\nabla g(p_0).$$

Exercício 6. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $g : U \to \mathbb{R}^n$ funções definidas num subconjunto U de $\mathbb{R}^m$ e seja p_0 um ponto interior de U. Suponha que f e g sejam diferenciáveis no ponto p_0. Considere a função $h : U \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(p) = f(p) \cdot g(p),$$

para todo $p \in U$.

(a) Verifique que h é diferenciável no ponto p_0.

(b) Verifique que se f e g são de classe C^k, então h é de classe C^k.

(c) Verifique que

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0) \cdot g(p_0) + f(p_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(p_0),$$

para todo vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$.

(d*) Verifique que

$$Jh(p_0) = g(p_0)^{\mathrm{t}} Jf(p_0) + f(p_0)^{\mathrm{t}} Jg(p_0),$$

em que na fórmula acima os vetores $f(p_0) \in \mathbb{R}^n$ e $g(p_0) \in \mathbb{R}^n$ devem ser escritos como matrizes coluna (de modo que as matrizes transpostas $f(p_0)^{\mathrm{t}}$ e $g(p_0)^{\mathrm{t}}$ são matrizes linha). Tomando a transposição dos dois lados dessa igualdade, conclua que se o vetor gradiente $\nabla h(p_0) \in \mathbb{R}^m$ for escrito como matriz coluna, então:

$$\nabla h(p_0) = Jf(p_0)^{\mathrm{t}} g(p_0) + Jg(p_0)^{\mathrm{t}} f(p_0).$$

Exercício 7. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^3$ e $g : U \to \mathbb{R}^3$ funções definidas num subconjunto U de $\mathbb{R}^m$ e seja p_0 um ponto interior de U. Suponha que f e g sejam diferenciáveis no ponto p_0. Considere a função $h : U \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$h(p) = f(p) \wedge g(p),$$

para todo $p \in U$.

(a) Verifique que h é diferenciável no ponto p_0.

(b) Verifique que se f e g são de classe C^k, então h é de classe C^k.

(c) Verifique que

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0) \wedge g(p_0) + f(p_0) \wedge \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(p_0),$$

para todo vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$.

Exercício* 8. Dado um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, verifique que a função $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(\vec{w}) = \vec{v} \wedge \vec{w},$$

para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, é linear. Se $\Omega_{\vec{v}}$ denota a matriz que representa T, verifique que

$$\Omega_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. (Observação: essa matriz já apareceu no Exercício 3 da sexta lista de Cálculo II. O contexto ali era velocidade angular vetorial de um referencial ortonormal móvel.)

Exercício* 9. Sob as condições do Exercício 7, verifique que

$$Jh(p_0) = -\Omega_{g(p_0)}\, Jf(p_0) + \Omega_{f(p_0)}\, Jg(p_0),$$

em que, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, a matriz $\Omega_{\vec{v}}$ é definida como no Exercício 8.

Sugestões

Exercício 5. (a) Uma função é diferenciável num ponto se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas for diferenciável nesse ponto. Use isso e o fato (A) da página 2.

(b) Uma função é de classe C^k se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas for de classe C^k. Use isso e o fato (B) da página 2.

(c) Se $\gamma(t) = p_0 + t\vec{v}$, então

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p_0) = (h \circ \gamma)'(0), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0) = (f \circ \gamma)'(0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(p_0) = (g \circ \gamma)'(0).$$

Use isso e o fato (C) da página 2 com as funções $h \circ \gamma$, $f \circ \gamma$ e $g \circ \gamma$ no lugar de h, f e g.

(d) Note que:

$$\begin{aligned} Jh(p_0)\vec{v} = \frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p_0) &= \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0)g(p_0) + f(p_0)\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(p_0) \\ &= g(p_0)\big(Jf(p_0)\vec{v}\big) + f(p_0)\big(Jg(p_0)\vec{v}\big) \\ &= \big(g(p_0)Jf(p_0) + f(p_0)Jg(p_0)\big)\vec{v}. \end{aligned}$$

Exercício 6. Para os itens (a), (b) e (c), use as mesmas sugestões dos itens correspondentes do Exercício 5. Para o item (d), note que:

$$\begin{aligned} Jh(p_0)\vec{v} = \frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p_0) &= \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0) \cdot g(p_0) + f(p_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(p_0) \\ &= g(p_0) \cdot \big(Jf(p_0)\vec{v}\big) + f(p_0) \cdot \big(Jg(p_0)\vec{v}\big) \\ &= g(p_0)^{\mathrm{t}}\big(Jf(p_0)\vec{v}\big) + f(p_0)^{\mathrm{t}}\big(Jg(p_0)\vec{v}\big) \\ &= \big(g(p_0)^{\mathrm{t}}Jf(p_0) + f(p_0)^{\mathrm{t}}Jg(p_0)\big)\vec{v}. \end{aligned}$$

Exercício 7. Use as mesmas sugestões dos itens correspondentes do Exercício 5.

Exercício 9. Note que:

$$\begin{aligned} Jh(p_0)\vec{v} = \frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p_0) &= \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0) \wedge g(p_0) + f(p_0) \wedge \frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(p_0) \\ &= -g(p_0) \wedge \big(Jf(p_0)\vec{v}\big) + f(p_0) \wedge \big(Jg(p_0)\vec{v}\big) \\ &= \big(-\Omega_{g(p_0)}\, Jf(p_0) + \Omega_{f(p_0)}\, Jg(p_0)\big)\vec{v}. \end{aligned}$$

Respostas

Exercício 1. (a) A matriz $Jh(p)$ é igual a:

$$\begin{pmatrix} -10 & 4 & 18 & 36 \\ 11 & 0 & -14 & 3 \\ -3 & 0 & 2 & -7 \\ -5 & 4 & 8 & 25 \\ 20 & -7 & -14 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) $(\partial_2 h_4)(p) = 4$.
(c) $(\partial_3 h)(p) = (18, -14, 2, 8, -14)$.
(d) $(\nabla h_5)(p) = (20, -7, -14, 8)$.
(e) $\frac{\partial h}{\partial \vec{v}}(p) = (110, 48, -36, 86, 79)$.

Exercício 2. $\gamma'(1) = (16, 11)$ e $\mu'(0) = (3, 2)$.

Exercício 3. A única solução é $\vec{v} = (1, 1, 3)$.