Terceira Lista

MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk
29/03/2012

Exercício 1. Sejam X um conjunto munido de uma relação de ordem total e A, B subconjuntos de X tais que $A \subset B$. Mostre que se A e B admitem supremo então:

$$\sup A \leq \sup B,$$

e que se A e B admitem ínfimo então:

$$\inf A \geq \inf B.$$

Exercício 2. Sejam X um conjunto não vazio e $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ funções cujas imagens sejam limitadas superiormente. Mostre que:

$$\sup\big\{f(x) + g(x) : x \in X\big\} \leq \sup\big\{f(x) : x \in X\big\} + \sup\big\{g(x) : x \in X\big\}.$$

Encontre um exemplo em que a desigualdade seja estrita. Note que, de acordo com o resultado do Exercício 5 da lista 2, vale que:

$$\sup\big\{f(x) + g(y) : x \in X,\ y \in X\big\} = \sup\big\{f(x) : x \in X\big\} + \sup\big\{g(x) : x \in X\big\}.$$

Exercício 3. Seja K um corpo ordenado arquimediano e sejam $a, b \in K$ com $a < b$. Mostre que existe um número racional[1] q tal que $a < q < b$. (Sugestão: trate primeiro o caso em que $a \geq 0$.)

[1]Mais precisamente, q deve pertencer à cópia de $\mathbb{Q}$ contida em K.

Exercício 4. Sejam A um conjunto e $f : A \to A$ uma função. Para cada número natural n, a *n-ésima iterada de f*, denotada por $f^{(n)} : A \to A$, é a função obtida pela composição de f com si mesma n vezes; mais precisamente, a seqüência $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ é definida recursivamente da seguinte forma:

$$f^{(0)} = \mathrm{Id}_A, \qquad f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Suponha que a função $f : A \to A$ seja injetora e seja B um subconjunto de A que contenha a imagem de f. Defina:

$$C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(A \setminus B),$$

e $h : A \to A$ fazendo:

$$h(x) = f(x), \quad \text{para } x \in C, \qquad h(x) = x, \quad \text{para } x \in A \setminus C.$$

Mostre que:

(a) $f(C) = B \cap C$;
(b) a função h é injetora;
(c) $A \setminus C = B \setminus C$;
(d) a imagem de h é igual a B.

Exercício 5. Sejam A, B conjuntos e suponha que existam uma função injetora $F : A \to B$ e uma função injetora $G : B \to A$. Mostre que existe uma função bijetora $H : A \to B$. (Sugestão: aplique o resultado do Exercício 4 com $f = G \circ F$ e com $G(B)$ no lugar de B.) Esse resultado é conhecido como *teorema de Cantor–Bernstein* ou *teorema de Schröder–Bernstein*.