Terceira Lista

MAT0112 – Vetores e Geometria

Prof. Daniel Victor Tausk

21/04/2018

Exercício 1. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3. Determine o cosseno do ângulo entre os vetores $(2,1,3)_{\mathcal{B}}$ e $(-1,4,2)_{\mathcal{B}}$.

Exercício 2. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3. Determine $\vec{v} \in V^3$ que seja ortogonal a $(-1,0,2)_{\mathcal{B}}$ e a $(2,1,3)_{\mathcal{B}}$ e tal que a primeira coordenada de $\vec{v}$ na base $\mathcal{B}$ seja igual a 1.

Exercício 3. Seja $\mathcal{B}$ uma base ortonormal de V^3. Determine os vetores $\vec{v} \in V^3$ tais que $\vec{v}$ seja combinação linear de $(0,1,2)_{\mathcal{B}}$ e $(1,-1,3)_{\mathcal{B}}$, $\vec{v}$ seja ortogonal a $(2,1,1)_{\mathcal{B}}$ e $\|\vec{v}\| = 1$.

Exercício 4. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base de V^3 tal que $\|\vec{e}_1\| = 1$, $\|\vec{e}_2\| = 2$, $\|\vec{e}_3\| = 1$, o ângulo entre $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$ seja igual a $\frac{\pi}{3}$, $\vec{e}_1$ seja ortogonal a $\vec{e}_3$ e o ângulo entre $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$ seja igual a $\frac{\pi}{4}$.

(a) Calcule os produtos escalares $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, com $i, j = 1, 2, 3$.

(b) Se $\vec{v} = (1,2,1)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{w} = (-1,1,0)_{\mathcal{B}}$, calcule $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

Exercício 5. Sejam $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$.

(a) Mostre que $\|\vec{v} + \vec{w}\| = \|\vec{v} - \vec{w}\|$ se, e somente se, os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forem ortogonais.

(b) Mostre que os vetores $\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ serão ortogonais se, e somente se, $\|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|$.

(c) Interprete os resultados dos itens (a) e (b) geometricamente em termos de teoremas a respeito de paralelogramos.

Exercício 6. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortogonal de V^3 e seja $\vec{v} \in V^3$ tal que $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (a_1, a_2, a_3)$. Mostre que, para $i = 1, 2, 3$, vale que:

$$a_i = \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_i}{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i}\,.$$

Os exercícios abaixo, marcados com estrela, são um pouco mais sofisticados e não serão cobrados em prova.

Exercício* 7. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base de V^3. Considere a matriz g definida por:

$$g = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Mostre que, para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$, vale a igualdade:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \big([\vec{v}]_{\mathcal{B}}\big)^{\mathrm{t}}\, g\, [\vec{w}]_{\mathcal{B}},$$

em que $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ e $[\vec{w}]_{\mathcal{B}}$ denotam as matrizes coluna que contém as coordenadas na base $\mathcal{B}$ dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, respectivamente.

Exercício* 8. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base de V^3 e seja g a matriz definida em (1). Se $\mathcal{C}$ é uma base ortonormal de V^3, mostre que:

$$(M_{\mathcal{CB}})^{\mathrm{t}} M_{\mathcal{CB}} = g.$$

Conclua que $\det(g) = \big(\det(M_{\mathcal{CB}})\big)^2 > 0$.

Exercício* 9. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base de V^3 e seja g a matriz definida em (1). Dado $\vec{v} \in V^3$, mostre que:

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = g^{-1} \begin{pmatrix} \vec{v} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{v} \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{v} \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix},$$

em que $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ denota a matriz coluna que contém as coordenadas do vetor $\vec{v}$ na base $\mathcal{B}$. (Note que esse resultado generaliza o resultado do Exercício 6.)

Respostas

Exercício 1. $\frac{8}{7\sqrt{6}}$

Exercício 2. $\vec{v} = \left(1, -\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}$.

Exercício 3. $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{59}}(3, -7, 1)_{\mathcal{B}}$ ou $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{59}}(3, -7, 1)_{\mathcal{B}}$.

Exercício 4. (a) $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 4$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \sqrt{2}$, $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1$. (b) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6 + \sqrt{2}$.