Terceira Lista

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk

06/04/2013

Exercício 1. Calcule os seguintes limites, quando existirem:

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 11x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}$;

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

(c) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 5x + 1}{2x^3 - 4x^2 + 3x + 2}$;

(d) $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{a}{x})^x$, onde a é um número real fixado;

(e) $\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\big)$;

(f) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, onde $\alpha > 0$ é um número real positivo fixado;

(g) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt[5]{x} + x\operatorname{sen} x - \cos^2 x}{x\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - \operatorname{sen} x}$;

(h) $\lim_{x\to 0} \ln x$;

(Observação: no item (h), não se preocupe em justificar sua resposta usando resultados dados em aula, pois nenhum deles pode ser usado para isso. Apenas tente visualizar o resultado desse limite, esboçando o gráfico da função ln. Uma justificativa rigorosa para o valor desse limite pode ser obtida usando o resultado do Exercício 5 abaixo.)

(i) $\lim_{x\to 0} (x \ln x)$;

(j) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$;

(k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(3x^2)\arccos x}{x^2}$;

(l) $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

Exercício 2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Seja dado $a \in \mathbb{R}$. Usando a definição de derivada, calcule $f'(a)$, se existir.

Exercício 3. Seja $D \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é dita *estritamente crescrente* se, para todos $x, y \in D$, vale que:

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

Encontre um exemplo de uma função estritamente crescente $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Exercício 4. Encontre funções $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tais que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} g(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \left(f(x)^{g(x)} \right) = 2.$$

Exercício* 5. Seja $D \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é dita *crescente* se, para todos $x, y \in D$, vale que:

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

A função f é dita *limitada inferiormente* se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq k$, para todo $x \in D$. Dados $a \in \mathbb{R}$ e uma função crescente $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$, mostre, usando a definição de limite, que se f não é limitada inferiormente então $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$. (Recorde que $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que para todo $M \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo x no domínio de f, se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) < M$.)