Segunda Lista

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk

26/03/2018

Exercício 1. Mostre que uma coleção de conjuntos fechada por diferenças também é fechada por interseções finitas. Conclua que uma coleção de conjuntos não vazia fechada por diferenças é um semi-anel.

Exercício 2. Seja $\mathcal{R}$ um anel e seja $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ uma medida finitamente aditiva. Mostre que

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B),$$

para quaisquer $A, B \in \mathcal{R}$.

Definição. Dados conjuntos A e B, a sua *diferença simétrica* é definida por:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Exercício 3. Seja $\mathcal{R}$ um anel e seja $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ uma medida finitamente aditiva.

(a) Mostre que se $A, B \in \mathcal{R}$ e $\mu(A \setminus B) = 0$, então $\mu(A) \le \mu(B)$.

(b) Mostre que se $A, B \in \mathcal{R}$ e $\mu(A \triangle B) = 0$, então $\mu(A) = \mu(B)$.

(c) Defina $d : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ fazendo

$$d(A, B) = \mu(A \triangle B),$$

para quaisquer $A, B \in \mathcal{R}$. Mostre que d satisfaz as seguintes condições:

(i) $d(A, A) = 0$, para todo $A \in \mathcal{R}$;

(ii) $d(A, B) = d(B, A)$, para todos $A, B \in \mathcal{R}$;

(iii) $d(A, C) \le d(A, B) + d(B, C)$, para todos $A, B, C \in \mathcal{R}$.

Conclua que se μ é finita, então d é uma pseudo-métrica.

Exercício 4 (continuação do Exercício 7 da primeira lista)**.** Sejam X e Y conjuntos e seja $f : X \to Y$ uma função. Defina $f^* : \wp(Y) \to \wp(X)$ como no Exercício 7 da primeira lista. Dada uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X, podemos considerar a imagem inversa de $\mathcal{C}$ por f^*, isto é:

$$(f^*)^{-1}[\mathcal{C}] = \big\{A \in \wp(Y) : f^{-1}[A] \in \mathcal{C}\big\}.$$

(a) Mostre que se $\mathcal{C} \subset \wp(X)$ é um anel (resp., σ-anel, álgebra de partes de X, σ-álgebra de partes de X), então $(f^*)^{-1}[\mathcal{C}]$ é um anel (resp., σ-anel, álgebra de partes de Y, σ-álgebra de partes de Y).

(b) Se $\mathcal{D}$ é uma coleção de subconjuntos de Y, mostre que a imagem direta por f^* do anel (resp., σ-anel, álgebra de partes de Y, σ-álgebra de partes de Y) gerado(a) por $\mathcal{D}$, coincide com o anel (resp., σ-anel, álgebra de partes de X, σ-álgebra de partes de X) gerado(a) por $f^*[\mathcal{D}]$.

(c) Dados subconjuntos A e B de Y, mostre que $f^*(A) = f^*(B)$ se, e somente se, a diferença simétrica $A \bigtriangleup B$ é disjunta da imagem da função f.

(d) Se $\mathcal{R}$ é um anel contido em $\wp(Y)$ e $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ é uma medida finitamente aditiva, mostre que existe uma (automaticamente única) função $\nu : f^*[\mathcal{R}] \to [0, +\infty]$ tal que $\nu \circ f^*|_{\mathcal{R}} = \mu$ se, e somente se, μ se anula em qualquer elemento de $\mathcal{R}$ que seja disjunto da imagem de f. Mostre que essa função ν, se existir, será uma medida finitamente aditiva e será σ-aditiva se μ for σ-aditiva e $\mathcal{R}$ for um σ-anel.

(e) Se X é um subconjunto de Y e $f : X \to Y$ é a aplicação inclusão, quem é f^*? Enuncie os resultados dos itens (b), (c) e (d) acima no contexto em que f é a aplicação inclusão.

Definição. Uma *relação de ordem parcial* em um conjunto X é uma relação binária $\le$ em X tal que $x \le x$, para todo $x \in X$ (propriedade reflexiva), tal que $x \le y$ e $y \le x$ implicam $x = y$, para todos $x, y \in X$ (propriedade anti-simétrica) e tal que $x \le y$ e $y \le z$ implicam $x \le z$, para todos $x, y, z \in X$ (propriedade transitiva). Uma *relação de ordem total* é uma relação de ordem parcial $\le$ tal que $x \le y$ ou $y \le x$, para todos $x, y \in X$. Escrevemos $x < y$ quando $x \le y$ e $x \ne y$.

Exercício 5. Seja $\leq$ uma relação de ordem total em um conjunto não vazio X. Dados $a, b \in X$, definimos:

$$]a, b]^X = \{x \in X : a < x \text{ e } x \leq b\}.$$

(a) Dados $a, b \in X$, mostre que $]a, b]^X \neq \emptyset$ se, e somente se, $a < b$.

(b) Mostre que

$$\mathcal{S} = \{\,]a, b]^X : a, b \in X,\ a \leq b\}$$

é um semi-anel.

(c) Dados $a, b, c, d \in X$ com $a < b$ e $c < d$, mostre que

$$]c, d]^X \subset\,]a, b]^X \iff a \leq c \text{ e } d \leq b$$

e que:

$$]c, d]^X = \,]a, b]^X \iff a = c \text{ e } d = b.$$

(d) Sejam $a, b \in X$, $a_i, b_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Suponha que $a < b$, $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, que $a_i \leq a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e que

$$]a, b]^X = \bigcup_{i=1}^{n} \,]a_i, b_i]^X\,, \tag{1}$$

com a união em (1) disjunta. Mostre que $b_i = a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e que $a_1 = a$ e $b_n = b$.

(e) Seja $F : X \to \mathbb{R}$ uma função crescente (i.e., para todos $x, y \in X$, se $x \leq y$, então $F(x) \leq F(y)$). Defina $\mu_F : \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ fazendo

$$\mu_F\big(\,]a, b]^X\big) = F(b) - F(a),$$

para todos $a, b \in X$ com $a \leq b$. Mostre que μ_F é uma medida finitamente aditiva.

(f) Dadas funções crescentes $F : X \to \mathbb{R}$, $G : X \to \mathbb{R}$, mostre que $\mu_F = \mu_G$ se, e somente se, a função $F - G$ é constante.

(g) Mostre que para qualquer medida finitamente aditiva finita μ em $\mathcal{S}$, existe uma função crescente $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $\mu = \mu_F$.

(h) Se $X = \mathbb{R}$ munido da ordem usual e $F : X \to \mathbb{R}$ é uma função crescente, mostre que μ_F é σ-aditiva se, e somente se, a função F é contínua à direita.

Exercício 6. Seja $X = \mathbb{Q}$ munido da ordem usual e considere a medida finitamente aditiva $\mu = \mu_F : \mathcal{S} \to [0, +\infty[$ definida como no Exercício 5, em que $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ é a aplicação inclusão.

(a) Mostre que se $(A_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência em $\mathcal{S}$ com $A_n \searrow \emptyset$, então $\lim_{n \to +\infty} \mu_F(A_n) = 0$.

(b) Mostre que μ_F não é σ-aditiva.

Exercício 7. Sejam $\mathcal{S}$ um semi-anel, $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ uma medida σ-aditiva, $\mathcal{A}$ o σ-anel gerado por $\mathcal{S}$, $\mathcal{H}$ o σ-anel hereditário gerado por $\mathcal{S}$ (i.e., a coleção dos conjuntos que podem ser cobertos por uma quantidade enumerável de elementos de $\mathcal{S}$) e $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ a medida exterior determinada por μ (i.e., para $A \in \mathcal{H}$, $\mu^*(A)$ é o ínfimo das somas $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, em que $(A_n)_{n\geq 1}$ é uma cobertura enumerável de A por elementos de $\mathcal{S}$). Denote por $\mathfrak{M}$ o σ-anel formado pelos conjuntos μ^*-mensuráveis.

(a) Para todo $A \in \mathcal{H}$, mostre que existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset E$ e $\mu^*(A) = \mu^*(E)$.

(b) Para todo $A \in \mathfrak{M}$ com $\mu^*(A) < +\infty$, mostre que existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $A \subset E$ e $\mu^*(E \setminus A) = 0$.

(c) Para todo $A \in \mathfrak{M}$ com $\mu^*(A) < +\infty$, mostre que existe $F \in \mathcal{A}$ tal que $F \subset A$ e $\mu^*(A \setminus F) = 0$. (Sugestão: tome E como no item (b) e depois aplique novamente o resultado do item (b) para o conjunto $E \setminus A$.)

Exercício 8. Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de partes de X. Dado $S \subset X$, denote por $\mathcal{A}[S]$ a σ-álgebra de partes de X gerada por $\mathcal{A} \cup \{S\}$.

(a) Mostre que $\mathcal{A}[S]$ é igual a:

$$\big\{(A_1 \cap S) \cup (A_2 \cap S^{\mathrm{c}}) : A_1, A_2 \in \mathcal{A}\big\},$$

em que $S^{\mathrm{c}} = X \setminus S$.

(b) Sejam $\mu_1 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, $\mu_2 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ medidas σ-aditivas. Suponha que μ_1 se anule em qualquer elemento de $\mathcal{A}$ disjunto de S e que μ_2 se anule em qualquer elemento de $\mathcal{A}$ contido em S. Mostre que existe uma (automaticamente única) função $\nu : \mathcal{A}[S] \to [0, +\infty]$ tal que

$$\nu\big((A_1 \cap S) \cup (A_2 \cap S^{\mathrm{c}})\big) = \mu_1(A_1) + \mu_2(A_2), \tag{2}$$

para quaisquer $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Mostre que ν é uma medida σ-aditiva.

(c) Seja $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ uma medida σ-aditiva e suponha que $\mu(A)$ seja finito, para todo $A \in \mathcal{A}$ contido em S. Seja:

$$c = \sup\big\{\mu(A) : A \in \mathcal{A},\ A \subset S\big\}.$$

Mostre que $c < +\infty$ e que existe $E \in \mathcal{A}$ com $E \subset S$ e $\mu(E) = c$. Definindo $\mu_1 : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ e $\mu_2 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ por

$$\mu_1(A) = \mu(A \cap E), \quad \mu_2(A) = \mu(A) - \mu_1(A),$$

para todo $A \in \mathcal{A}$, mostre que μ_1 e μ_2 são medidas σ-aditivas satisfazendo as condições que aparecem no item (b). Mostre também que ν definida em (2) é uma medida σ-aditiva em $\mathcal{A}[S]$ que estende μ.