Segunda Lista

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk

17/08/2013

Recordemos algumas definições dadas em aula.

Definição 1. Seja (M, d) um espaço métrico. Dado um subconjunto A de M, o *diâmetro* de A é definido por[1]:

$$\operatorname{diam}(A) = \sup \big\{ d(x, y) : x, y \in A \big\}.$$

Dizemos que A é *limitado* se $\operatorname{diam}(A) < +\infty$, isto é, se existe $c \geq 0$ tal que $d(x, y) \leq c$, para todos $x, y \in A$. Uma função tomando valores em M é dita *limitada* se sua imagem for limitada.

Definição 2. Seja (M, d) um espaço métrico. Dados $x \in M$, $r > 0$, então a *bola aberta* de centro x e raio r é definida por:

$$\mathrm{B}(x, r) = \big\{ y \in M : d(y, x) < r \big\},$$

a *bola fechada* de centro x e raio r é definida por:

$$\mathrm{B}[x, r] = \big\{ y \in M : d(y, x) \leq r \big\},$$

e a *esfera* de centro x e raio r é definida por:

$$\mathrm{S}(x, r) = \big\{ y \in M : d(y, x) = r \big\}.$$

Exercício 1. Seja (M, d) um espaço métrico. Dado um subconjunto A de M, mostre que são equivalentes:

- (a) A é limitado;
- (b) para todo $x \in M$, existe $r > 0$ tal que $A \subset \mathrm{B}(x, r)$;
- (b') para todo $x \in M$, existe $r > 0$ tal que $A \subset \mathrm{B}[x, r]$.

Se $M \neq \emptyset$, mostre que (a), (b) e (b') também são equivalentes a:

- (c) existem $x \in M$ e $r > 0$ tais que $A \subset \mathrm{B}(x, r)$;
- (c') existem $x \in M$ e $r > 0$ tais que $A \subset \mathrm{B}[x, r]$.

Exercício 2. Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que a união de uma coleção finita de subconjuntos limitados de M é limitada.

Exercício 3. Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que se $(x_n)_{n \geq 1}$ é uma seqüência em M convergente para $x \in M$ então toda subseqüência de $(x_n)_{n \geq 1}$ converge para x.

Exercício 4. Mostre que toda seqüência convergente num espaço métrico é limitada.

[1] Quando $A = \emptyset$, temos $\operatorname{diam}(A) = -\infty$.

Exercício 5. Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que uma seqüência $(x_n)_{n\geq 1}$ em M converge para um ponto $x \in M$ se e somente se a seqüência $\big(d(x_n, x)\big)_{n\geq 1}$ converge para 0 (com respeito à métrica usual de $\mathbb{R}$).

Exercício 6. Sejam (M, d), (N, d'), (P, d'') espaços métricos e sejam dadas funções $f : M \to N$, $g : N \to P$. Mostre que:

(a) se f é contínua num ponto $a \in M$ e g é contínua no ponto $f(a)$ então $g \circ f$ é contínua no ponto a;
(a') se f e g são contínuas então $g \circ f$ é contínua;
(b) se f e g são uniformemente contínuas então $g \circ f$ é uniformemente contínua;
(c) se f e g são Lipschitzianas então $g \circ f$ é Lipschitziana.

Exercício 7. Sejam (M, d), (N, d') espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Mostre que são equivalentes:

(a) f é uniformemente contínua;
(b) para quaisquer seqüências $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ em M, se $d(x_n, y_n) \to 0$ então $d\big(f(x_n), f(y_n)\big) \to 0$.

Exercício 8. Sejam I um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função.

(a) Mostre que se $c \geq 0$ é uma constante de Lipschitz para f e se $x \in I$ é um ponto (não isolado de I) no qual f é derivável então $|f'(x)| \leq c$.
(b) Suponha que I seja um intervalo, que f seja contínua em I e derivável nos pontos interiores de I. Dado $c \geq 0$, mostre que se

$$|f'(x)| \leq c,$$

para todo ponto x no interior de I então c é uma constante de Lipschitz para f.

A definição a seguir está sendo dada num contexto um pouco mais geral do que foi dado em aula.

Definição 3. Sejam X um conjunto, (M, d) um espaço métrico e $(f_n)_{n\geq 1}$ uma seqüência de funções $f_n : X \to M$. Dizemos que $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge pontualmente* para uma função $f : X \to M$ se, para todo $x \in X$, a seqüência $\big(f_n(x)\big)_{n\geq 1}$ converge para $f(x)$, isto é, se para todo $x \in M$ e todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que, para todo $n \geq n_0$, temos $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$. Dizemos que $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformemente* para f se para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que, para todo $x \in X$ e todo $n \geq n_0$, vale que $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Exercício 9. Sejam X um conjunto e (M, d) um espaço métrico. Denote por $\mathfrak{B}(X, M)$ o conjunto de todas as funções limitadas $f : X \to M$. Para $f, g \in \mathfrak{B}(X, M)$, defina[2]:

$$d_{\sup}(f, g) = \sup_{x \in X} d\big(f(x), g(x)\big). \tag{1}$$

(a) Mostre que $d_{\sup}$ é uma métrica em $\mathfrak{B}(X, M)$.

(b) Dada uma seqüência $(f_n)_{n \geq 1}$ em $\mathfrak{B}(X, M)$, mostre que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge para $f \in \mathfrak{B}(X, M)$ com respeito a $d_{\sup}$ se e somente se $(f_n)_{n \geq 1}$ converge para f uniformemente.

(c*) Denote por $\mathfrak{F}(X, M)$ o conjunto de todas as funções $f : X \to M$ e defina $d_{\sup}(f, g)$, para $f, g \in \mathfrak{F}(X, M)$, como em (1). Agora $d_{\sup}(f, g)$ pode assumir o valor $+\infty$ e se isso ocorrer não será uma métrica. Mostre que a relação binária $\sim$ em $\mathfrak{F}(X, M)$ definida por:

$$f \sim g \Longleftrightarrow d_{\sup}(f, g) < +\infty, \quad f, g \in \mathfrak{F}(X, M),$$

é uma relação de equivalência em $\mathfrak{F}(X, M)$ e que $\mathfrak{B}(X, M)$ é uma das classes de equivalência[3] determinada por $\sim$. Mostre também que a restrição de $d_{\sup}$ a qualquer uma das classes de equivalência determinada por $\sim$ é uma métrica.

(d*) Dada $f \in \mathfrak{F}(X, M)$, denote por $\mathfrak{F}_f(X, M)$ a classe de equivalência de f determinada por $\sim$. Dada uma seqüência $(f_n)_{n \geq 1}$ em $\mathfrak{F}(X, M)$, mostre que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente para f se e somente se valem as duas seguintes condições:

(i) existe $n_0 \geq 1$ tal que $f_n \in \mathfrak{F}_f(X, M)$ para todo $n \geq n_0$;

(ii) $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge para f no espaço métrico $\big(\mathfrak{F}_f(X, M), d_{\sup}\big)$.

---

[2]Se $X = \emptyset$, defina $d_{\sup}(f, g) = 0$.

[3]Exceto se $X \neq \emptyset$ e $M = \emptyset$, caso em que $\mathfrak{F}(X, M) = \mathfrak{B}(X, M) = \emptyset$.

Exercício 10.** Sejam X um conjunto não enumerável e (M, d) um espaço métrico que possui ao menos dois pontos. O objetivo deste exercício é mostrar que não existe uma métrica (e nem mesmo uma pseudo-métrica) ρ no conjunto $\mathfrak{F}(X, M)$ das funções $f : X \to M$ cuja noção de convergência de seqüências correspondente seja a convergência pontual de funções. No que segue, suponha por absurdo que ρ seja uma pseudo-métrica em $\mathfrak{F}(X, M)$ tal que, dadas uma seqüência $(f_n)_{n\geq 1}$ em $\mathfrak{F}(X, M)$ e $f \in \mathfrak{F}(X, M)$ então $(f_n)_{n\geq 1}$ converge para f com respeito a ρ se e somente se $(f_n)_{n\geq 1}$ converge para f pontualmente. Sejam $m_0, m_1 \in M$ dois pontos distintos quaisquer. Denote por $f : X \to M$ a função constante e igual a m_0. Para todo $x \in X$, denote por $f_x : X \to M$ a função tal que $f_x(x) = m_1$ e $f_x(y) = m_0$, para todo $y \in X$ distinto de x.

(a) Mostre que, para todo $\varepsilon > 0$, o conjunto:

$$A_\varepsilon = \big\{x \in X : \rho(f_x, f) \geq \varepsilon\big\}$$

é finito. (Sugestão: faça por absurdo.)

(b) Seja $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{\frac{1}{k}}$. Em vista do item (a), o conjunto A é enumerável. Seja $x \in X \setminus A$. Mostre que a seqüência constante e igual a f_x converge para f com respeito a ρ. Obtenha uma contradição.