Segunda Lista

MAT0222 – Álgebra Linear II

Prof. Daniel Victor Tausk

15/03/2014

Exercício 1. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K. Mostre que a aplicação:

$$\mathrm{L}(V, W) \ni T \longmapsto T^* \in \mathrm{L}(W^*, V^*)$$

é linear.

Exercício 2. Sejam V, W e Z espaços vetoriais sobre um corpo K e sejam $T : V \to W$, $S : W \to Z$ transformações lineares. Mostre que:

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*.$$

Exercício 3. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e seja dada uma transformação linear $T : V \to W$. Mostre que:

$$\mathrm{Ker}(T^*) = \big(\mathrm{Im}(T)\big)^{\mathrm{o}}.$$

Exercício 4. Sejam V, W e Z espaços vetoriais sobre um corpo K e sejam dadas transformações lineares $T : V \to W$ e $S : V \to Z$. Assuma que $\mathrm{Ker}(S)$ contenha $\mathrm{Ker}(T)$, ou seja, que $S|_{\mathrm{Ker}(T)} = 0$.

(a) Assumindo que T seja sobrejetora, mostre que existe uma *única* transformação linear $\overline{S} : W \to Z$ tal que $\overline{S} \circ T = S$. (Sugestão: defina $\overline{S}$ fazendo $\overline{S}(w) = S(v)$, onde $v \in V$ é escolhido de modo que $T(v) = w$. Verifique que $S(v)$ não depende da escolha de v, o que garante que a função $\overline{S}$ está bem definida.)

(b) Mostre (sem assumir que T seja sobrejetora) que existe uma transformação linear $\overline{S} : W \to Z$ tal que $\overline{S} \circ T = S$. (Sugestão: comece usando o resultado do item (a) para obter $\overline{S} : \mathrm{Im}(T) \to Z$.)

O diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, "S"] & \\ W \arrow[r, "\overline{S}"'] & Z \end{tikzcd}$$

ilustra a relação entre T, S e $\overline{S}$. A igualdade $\overline{S} \circ T = S$ pode ser expressa dizendo que esse diagrama é *comutativo*.

Exercício 5. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e seja dada uma transformação linear $T : V \to W$. Mostre que:

$$\mathrm{Im}(T^*) = \big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\mathrm{o}}.$$

(Sugestão: para mostrar a inclusão $\big(\mathrm{Ker}(T)\big)^{\mathrm{o}} \subset \mathrm{Im}(T^*)$, use o resultado do item (b) do Exercício 4.)

Exercício 6. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e sejam dados funcionais lineares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V^*$. Seja:

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\alpha_i).$$

Mostre que se $\alpha \in V^*$ anula W então α pertence ao subespaço gerado por $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. (Sugestão: considere a transformação linear $T : V \to K^n$ definida por $T(v) = \big(\alpha_1(v), \ldots, \alpha_n(v)\big)$ e use o resultado do Exercício 5.)

Exercício 7. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K e Λ um subespaço de V^*.

(a) Mostre que $\Lambda \subset (\Lambda_{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}}$.
(b) Assumindo que $\dim(\Lambda) < +\infty$, mostre que $\Lambda = (\Lambda_{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}}$. (Sugestão: sejam α_1, ..., α_n geradores de Λ e use o resultado do Exercício 6.)

Exercício 8. Sejam K um corpo e V o espaço vetorial formado por todas as seqüências $(x_n)_{n \geq 1}$ de elementos de K. Para cada $n \geq 1$, seja $\pi_n : V \to K$ o funcional linear que a cada seqüência associa o seu n-ésimo termo. Seja Λ o subespaço de V^* gerado por $\big\{\pi_n : n \geq 1\big\}$.

(a) Determine o subespaço anulado Λ_{o}.
(b) Mostre que $(\Lambda_{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}}$ é diferente de Λ.

Exercício 9. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K e seja Λ um subespaço de V^*. Mostre que:

$$\dim(V) = \dim(\Lambda) + \dim(\Lambda_{\mathrm{o}}).$$

(Sugestão: use o resultado do item (b) do Exercício 7 e o fato, demonstrado em aula, que $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^{\mathrm{o}})$, para um subespaço W de V.)

Exercício 10. Seja V um espaço vetorial de dimensão $n < +\infty$ sobre um corpo K e seja $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base de V. Denote por $\mathcal{E}^*$ a base de V^* dual a V e por $\mathcal{E}^{**}$ a base de V^{**} dual a $\mathcal{E}^*$. Se $J : V \to V^{**}$ denota a aplicação linear natural, mostre que:

$$\mathcal{E}^{**} = \big(J(e_1), \ldots, J(e_n)\big).$$

Exercício 11. Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K e sejam $J_V : V \to V^{**}$ e $J_W : W \to W^{**}$ as aplicações lineares naturais. Dada uma transformação linear $T : V \to W$, mostre que:

$$T^{**} \circ J_V = J_W \circ T.$$

Essa igualdade pode ser expressa dizendo que o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & W^{**} \\
V \arrow[u, "J_V"] \arrow[r, "T"'] & W \arrow[u, "J_W"']
\end{tikzcd}$$

é comutativo.