Segunda Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk

02/03/2019

Exercício 1. Em cada um dos itens abaixo, escreva a matriz Jacobiana da função diferenciável f dada num ponto arbitrário de seu domínio.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$f(x, y) = (x, y, x^2 + y^2),$$
para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$f(\theta, \varphi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi),$$
para todo $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$;

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$f(x, y, z) = (xyz, x^2 + y^2 - z^2),$$
para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

(d) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \|x\|,$$
para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq 0$;

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t),$$
para todo $t \in \mathbb{R}$;

(f) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ definida por
$$f(x) = \frac{x}{\|x\|},$$
para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq 0$.

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ uma função diferenciável no ponto:
$$p = (7, 1, 1).$$
Suponha que a matriz Jacobiana de f no ponto p seja dada por:
$$Jf(p) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ a curva parametrizada definida por
$$\gamma(t) = f(7 + 3t, 1 + 2t, 1 - t),$$
para todo $t \in \mathbb{R}$. Calcule $\gamma'(0)$.

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, x + y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Dado $r > 0$, denote por $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$ o círculo de centro na origem e raio r. Descreva a imagem direta $f[C_r]$ de C_r por f.

(b) Descreva a imagem da função f.

Exercício 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ a função definida da seguinte forma: para todo ponto $p \in \mathbb{R}^2$, $p \neq 0$, o ponto $f(p)$ será o único ponto de $\mathbb{R}^2$ tal que:

(i) $f(p)$ pertence à semireta saindo da origem de $\mathbb{R}^2$ e passando por p;

(ii) o produto da distância de p até à origem pela distância de $f(p)$ até à origem é igual a 1.

A função f é chamada *inversão* em relação ao círculo unitário centrado na origem[1].

(a) Escreva uma fórmula explícita para $f(x, y)$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(b) Verifique que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é sua própria inversa, isto é, a composição $f \circ f$ é a aplicação identidade.

(c) Mostre que se $r \subset \mathbb{R}^2$ é uma reta que não passa pela origem, então a imagem direta $f[r]$ é da forma $C \setminus \{0\}$, em que C é um círculo que passa pela origem. Se $ax + by = 1$ é a equação da reta r, determine as coordenadas do centro de C em função de a e b.

Exercício 5. Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todos os pontos de U. Considere a função

$$\nabla f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que a cada $p \in U$ associa o gradiente de f no ponto p. Supondo que a função ∇f seja diferenciável num ponto $p \in U$, escreva a matriz Jacobiana de ∇f no ponto p. Você já tinha visto essa matriz antes?

---

[1] De maneira similar define-se inversão em relação a um círculo qualquer. Deve-se trocar a origem pelo centro do círculo nos itens (i) e (ii) e deve-se trocar 1 pelo quadrado do raio do círculo no item (ii).

Exercício 6. Demonstre as afirmações abaixo usando diretamente a definição de função diferenciável.

(a) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma função constante, então f é diferenciável em qualquer ponto $p \in \mathbb{R}^m$ e a diferencial de f no ponto p é a transformação linear nula.

(b) Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma função linear, então T é diferenciável em qualquer ponto $p \in \mathbb{R}^m$ e a diferencial de T no ponto p é igual a T.

(c) Se U é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$, p é um ponto interior de U e se $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $g : U \to \mathbb{R}^n$ são funções diferenciáveis no ponto p cujas diferenciais nesse ponto são T e S, respectivamente, então a soma $f + g$ é diferenciável no ponto p e sua diferencial no ponto p é $T + S$.

(d) Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma função afim com transformação linear subjacente $T_0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (veja o Exercício 5 da primeira lista), então T é diferenciável em qualquer ponto $p \in \mathbb{R}^m$ e a diferencial de T no ponto p é T_0.

Exercício 7. Seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função com funções coordenadas $T_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Verifique que T é linear se, e somente se, T_i é linear, para todo $i = 1, \ldots, n$. Qual a relação entre a matriz que representa T e as matrizes que representam as T_i?

Exercício 8. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função definida num subconjuto U de $\mathbb{R}^m$ e seja p um ponto interior de U. Denote por $f_i : U \to \mathbb{R}$ a i-ésima função coordenada de f, para $i = 1, \ldots, n$. Usando diretamente a definição de função diferenciável, verifique que f é diferenciável no ponto p se, e somente se, f_i é diferenciável no ponto p, para todo $i = 1, \ldots, n$. Note que se f for diferenciável no ponto p com diferencial nesse ponto igual a $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, então a i-ésima função coordenada $T_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de T será a diferencial de f_i no ponto p, para $i = 1, \ldots, n$.

Exercício 9. O objetivo deste exercício é apresentar uma visão mais madura da noção de gradiente[2].

(a) Dado um vetor $w \in \mathbb{R}^n$, verifique que a função $R_w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $R_w(v) = v \cdot w$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, é linear.

(b) Verifique que para qualquer transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existe um único vetor $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $T = R_w$. Diz-se que o vetor w *representa* a transformação linear T.

(c) Sejam U um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, p um ponto interior de U e seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto p cuja diferencial é $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Verifique que o vetor que representa T (no sentido do item (b)) é precisamente o gradiente $\nabla f(p)$ de f no ponto p.

[2]Ela é necessária quando se vai definir gradiente para funções em espaços mais gerais do que $\mathbb{R}^n$ (espaços vetoriais ou variedades diferenciáveis) que não possuem um sistema de coordenadas canônico. A presença de algo que faça o papel do produto escalar nesses espaços é fundamental.

Sugestões

Exercício 2. $\gamma'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p)$, em que $\vec{v} = (3, 2, -1)$.

Exercício 4. (c) Como f é igual à sua própria inversa, vale que

$$f[r] = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : f(x, y) \in r\big\}.$$

Use a fórmula que você obteve no item (a) para determinar quais pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ são tais que $f(x, y)$ satisfaz a equação da reta r.

Exercício 9. (b) As coordenadas de w são simplesmente as entradas da matriz que representa T. Em outras palavras, $w = \big(T(e_1), \ldots, T(e_n)\big)$, em que e_1, e_2, $\ldots$, e_n denota a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Respostas

Exercício 1.

(a) $$Jf(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2x & 2y\end{pmatrix};$$

(b) $$Jf(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi\end{pmatrix};$$

(c) $$Jf(x,y,z)=\begin{pmatrix}yz & xz & xy\\ 2x & 2y & -2z\end{pmatrix};$$

(d) $$Jf(x)=\frac{1}{\|x\|}\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix};$$

(e) $$Jf(t)=\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}t\\ \cos t\\ 1\end{pmatrix};$$

(f) $$Jf(x)=\frac{1}{\|x\|}(I-P_x),$$

em que I denota a matriz identidade $n\times n$ e P_x denota a matriz $n\times n$ cuja entrada na linha i e coluna j é $\frac{x_ix_j}{\|x\|^2}$, para $i,j=1,\ldots,n$, isto é:

$$P_x=\frac{1}{\|x\|^2}\begin{pmatrix}x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2\end{pmatrix}.$$

Recorde do Exercício 2 da primeira lista que P_x é a matriz que representa a transformação linear proj_x que faz a projeção ortogonal sobre o vetor x.

Exercício 2. $\gamma'(0)=(7,-4,7,4)$.

Exercício 3. (a) $f[C_r]$ é o segmento de reta fechado paralelo ao eixo y com extremidades $(r^2,-r\sqrt{2})$ e $(r^2,r\sqrt{2})$. (b) A imagem de f é formada pela parábola $y^2=2x$ e pela região circundada por ela ou, mais precisamente:

$$\mathrm{Im}(f)=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2\le 2x\big\}.$$

Exercício 4. (a) $f(x,y)=\frac{(x,y)}{x^2+y^2}$. (c) O centro de C é $\big(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\big)$.

Exercício 5. A matriz Jacobiana de ∇f no ponto p é a matriz cuja entrada na linha i e coluna j é a derivada parcial de segunda ordem $(\partial_j \partial_i f)(p)$ para $i, j = 1, \ldots, n$, isto é:

$$J(\nabla f)(p) = \begin{pmatrix} (\partial_1 \partial_1 f)(p) & (\partial_2 \partial_1 f)(p) & \cdots & (\partial_n \partial_1 f)(p) \\ (\partial_1 \partial_2 f)(p) & (\partial_2 \partial_2 f)(p) & \cdots & (\partial_n \partial_2 f)(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial_1 \partial_n f)(p) & (\partial_2 \partial_n f)(p) & \cdots & (\partial_n \partial_n f)(p) \end{pmatrix}.$$

Essa é a *matriz Hessiana* de f no ponto p.

Exercício 7. A matriz que representa T_i é a i-ésima linha da matriz que representa T.