Segunda Lista

MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk
19/03/2012

Exercício 1. Recorde que um corpo ordenado K é dito *arquimediano* se dados $a, b \in K$, $a, b > 0$, existe um inteiro positivo n tal que $na > b$. Mostre que um corpo ordenado K é arquimediano se e somente se o conjunto dos números naturais[1] é ilimitado em K.

Exercício 2. Seja K um corpo ordenado e seja $s \in K$ tal que $s > 0$ e $s^2 > 2$. Mostre que existe $t \in K$ com $0 < t < s$ e $t^2 > 2$.

Exercício 3. Seja K um corpo ordenado. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) todo subconjunto não vazio de K limitado superiormente admite supremo (i.e., K é completo);
(b) todo subconjunto não vazio de K limitado inferiormente admite ínfimo.

(Sugestão: dado um subconjunto A de K, considere o conjunto:

$$\big\{-a : a \in A\big\}$$

formado pelos opostos dos elementos de A.)

Exercício 4. Seja K um corpo ordenado e seja $a \in K$, $a > 0$. Seja n um inteiro positivo.

(a) Mostre que o conjunto:

$$A = \big\{x \in K : x > 0 \text{ e } x^n < a\big\}$$

é não vazio e limitado superiormente.

(b) Mostre que se A admite um supremo $s = \sup A$ então $s^n = a$.

Conclua que em $\mathbb{R}$ todo elemento positivo admite uma raiz n-ésima.

Exercício 5. Seja K um corpo ordenado e sejam A, B subconjuntos de K. Se A admite um supremo $s = \sup A$ e B admite um supremo $t = \sup B$, mostre que $s + t$ é o supremo do conjunto:

$$\big\{a + b : a \in A,\ b \in B\big\}.$$

[1] Mais precisamente, estamos falando da *cópia* do conjunto dos números naturais contida em K.