Segunda Lista

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

18/08/2018

Uma aplicação interessante (e relevante para a Física) da integral de Riemann é o cálculo de centros de massa de distribuições contínuas de matéria. Apresentamos abaixo as noções relevantes e depois alguns exercícios.

Definição. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções que admitem integral de Riemann e tais que $f(x) \le g(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Considere a região R do plano que fica entre os gráficos de f e g, isto é:

$$R = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \text{ e } f(x) \le y \le g(x)\big\}. \tag{1}$$

Assumindo uma distribuição de massa uniforme[1] sobre a região R, temos que o *centro de massa* de R é o ponto (x_C, y_C) cujas coordenadas são dadas por

$$x_C = \frac{1}{A}\int_a^b x\big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad y_C = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}\Big[\big(g(x)\big)^2 - \big(f(x)\big)^2\Big]\,\mathrm{d}x,$$

em que A denota a área total da região R (que assumimos aqui ser não nula).

O centro de massa de uma coleção de partículas massivas é nada mais do que a média ponderada das posições das partículas usando as respectivas massas como pesos. Mais precisamente, se temos um número finito de partículas massivas com posições $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^2$ e respectivas massas $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \,]0, +\infty[$, então o centro de massa é a média ponderada $\frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i p_i$, em que $M = \sum_{i=1}^n m_i$ é a massa total. Quando a matéria não é formada por partículas, mas sim por um *continuum* distribuído por uma região $R \subset \mathbb{R}^2$, então a distribuição de massa deve ser descrita por uma função densidade de massa por área (que assumimos ser constante na definição acima) e a média ponderada deve ser calculada usando integrais em vez de somatórias. Um tramento mais apropriado desse tópico pode ser feito no curso de Cálculo III usando integrais duplas[2], mas é possível apresentar aqui uma motivação razoável para a definição acima: consideramos uma fatia estreita de R situada entre as abscissas x e $x + \Delta x$. O centro de massa dessa fatia situa-se aproximadamente (desprezando erros que tendem a zero quando Δx tende a zero) no ponto médio do segmento de extremidades $\big(x, f(x)\big)$ e $\big(x, g(x)\big)$, isto é, no ponto de abscissa x e ordenada

[1] Isto é, existe uma constante positiva ρ tal que a massa de um subconjunto de R é o produto de ρ pela área desse subconjunto.

[2] Definiríamos aí $x_C = \frac{1}{M}\iint_R x\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ e $y_C = \frac{1}{M}\iint_R y\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, em que ρ denota a densidade de massa por área sobre a região R (que estávamos assumindo ser constante) e $M = \iint_R \rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ denota a massa total de R. As fórmulas que apresentamos seguiriam então dessa definição usando o Teorema de Fubini.

$\frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)\big)$. Fazemos agora a média ponderada dos centros de massa dessas fatias estreitas usando as áreas das fatias como pesos. A área da fatia é aproximadamente $\big(g(x)-f(x)\big)\Delta x$ (desprezando erros que tendem a zero mais rápido do que Δx quando Δx tende a zero) e portanto uma aproximação para x_C e y_C é dada pelas somas

$$x_C \approx \frac{1}{A}\sum_{x\in P} x\big(g(x)-f(x)\big)\Delta x \quad \text{e}$$

$$y_C \approx \frac{1}{A}\sum_{x\in P} \frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)\big)\big(g(x)-f(x)\big)\Delta x,$$

em que P denota uma partição de $[a,b]$ em intervalos de comprimento Δx. As integrais são obtidas agora fazendo Δx tender a zero.

Exercício 1. Determine o centro de massa do semi-disco de raio $r>0$ dado por:

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le r^2 \text{ e } y\ge 0\big\}.$$

Exercício 2. Considere a região R delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(l,0)$ e (p,h), em que $l>0$, $h>0$ e $0<p<l$.

(a) Escreva as integrais que são usadas para calcular as coordenadas do centro de massa de R.

(b) Calcule essas integrais e verifique que o centro de massa de R é a média aritmética simples

$$\frac{1}{3}\big((0,0)+(l,0)+(p,h)\big)$$

dos vértices do triângulo (ou seja, o baricentro do triângulo).

Exercício 3. Considere a região R entre os gráficos de f e g dada em (1) e suponha que ela esteja contida no semi-plano $\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0\big\}$. Usando o método das cascas cilíndricas, escreva a fórmula para o volume do sólido obtido pela rotação de R em torno do eixo y. Verifique que esse volume é igual ao produto da área de R pelo perímetro do círculo obtido pela rotação do centro de massa de R em torno do eixo y.

Respostas

Exercício 1. As coordenadas do centro de massa são
$$x_C = \frac{1}{A}\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{e} \quad y_C = \frac{1}{A}\int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4r}{3\pi},$$
em que $A = \frac{1}{2}\pi r^2$.

Exercício 2. As coordenadas do centro de massa são
$$x_C = \frac{1}{A}\int_0^p \frac{h}{p}\,x^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{A}\int_p^l \frac{h}{l-p}\,x(l-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(l+p) \quad \text{e}$$
$$y_C = \frac{1}{A}\int_0^p \frac{h^2}{2p^2}\,x^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{A}\int_p^l \frac{h^2}{2(l-p)^2}\,(l-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}h,$$
em que $A = \frac{1}{2}lh$.