Lista de Exercícios

MAT5798 – Medida e Integração

11/06/2006

1. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(X', \mathcal{A}', \mu')$ espaços de medida e sejam $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$, $\overline{\mu'} : \overline{\mathcal{A}'} \to [0, +\infty]$ os completamentos das medidas μ e μ', respectivamente. Se $\phi : (X, \mathcal{A}) \to (X', \mathcal{A}')$ é uma função mensurável tal que $\mu\big(\phi^{-1}(E)\big) = 0$, para todo $E \in \mathcal{A}'$ com $\mu'(E) = 0$, mostre que a função:

$$\phi : (X, \overline{\mathcal{A}}) \longrightarrow (X', \overline{\mathcal{A}'})$$

também é mensurável.

2. Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(X', \mathcal{A}', \mu')$ espaços de medida. Dizemos que uma função $\phi : X \to X'$ *preserva medidas* se ϕ é mensurável e se $\phi_* \mu = \mu'$, i.e., se:

$$\mu\big(\phi^{-1}(E)\big) = \mu'(E),$$

para todo $E \in \mathcal{A}'$. Denote por $\bar{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$, $\overline{\mu'} : \overline{\mathcal{A}'} \to [0, +\infty]$ os completamentos das medidas μ e μ', respectivamente. Se:

$$\phi : (X, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow (X', \mathcal{A}', \mu')$$

é uma função que preserva medidas, mostre que a função:

$$\phi : (X, \overline{\mathcal{A}}, \bar{\mu}) \longrightarrow (X', \overline{\mathcal{A}'}, \overline{\mu'})$$

também preserva medidas.

3. Dados $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, denote por $A + x$ a *translação* de A definida por $A + x = \big\{p + x : p \in A\big\}$. Se $\mathfrak{m} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ denota a medida de Lebesgue, mostre que para todo conjunto $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos $A + x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathfrak{m}(A + x) = \mathfrak{m}(A)$ (sugestão: use o resultado do Exercício 2 e o fato que uma medida em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ que coincide com $\mathfrak{m}$ nos blocos retangulares deve coincidir com $\mathfrak{m}$ em todos os Boreleanos).

4. Seja $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ uma função bijetora e considere a função $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\tilde{\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(x)}\big),$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathfrak{m} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ denota a medida de Lebesgue, mostre que para todo conjunto $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ temos $\tilde{\sigma}(A) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathfrak{m}\big(\tilde{\sigma}(A)\big) = \mathfrak{m}(A)$.

5. Sejam $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ números reais e considere a função $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = (c_1 x_1, \dots, c_n x_n),$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathfrak{m} : \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ denota a medida de Lebesgue, mostre que para todo $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ temos $\phi(A) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ e:

$$\mathfrak{m}\big(\phi(A)\big) = |c_1 \cdots c_n| \mathfrak{m}(A).$$

6. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida tal que a medida μ é σ-finita. Se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos, mostre que o conjunto:

$$\big\{ i \in I : \mu(A_i) > 0 \big\}$$

é enumerável.

7. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\phi : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável cuja derivada $\phi' : I \to \mathbb{R}$ é crescente.

(a) Mostre que:

$$\phi(t) \geq \phi(t_0) + \phi'(t_0)(t - t_0),$$

para todos $t_0, t \in I$.

(b) Uma função $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita *afim* se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $L(t) = at + b$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma família $\mathcal{L}$ de funções afins $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\phi(t) = \sup_{L \in \mathcal{L}} L(t),$$

para todo $t \in I$.

(c) *(desigualdade de Jensen)* Se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida com $\mu(X) = 1$ e se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função integrável com $f(X) \subset I$, mostre que $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \in I$, que a função $\phi \circ f$ é quase integrável e que:

$$\phi\Big(\int_X f \, \mathrm{d}\mu \Big) \leq \int_X \phi \circ f \, \mathrm{d}\mu.$$

8. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis, onde $\mathbb{R}^n$ é munido da σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ de conjuntos Lebesgue mensuráveis e $\mathbb{R}$ é munido da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que a função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto x - y \in \mathbb{R}^n$ é mensurável se $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ e $\mathbb{R}^n$ são munidos respectivamente das σ-álgebras $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{2n})$ e $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ (sugestão: use o resultado do Exercício 1).

(b) Mostre que a função $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, y) \mapsto f(x - y)g(y) \in \mathbb{R}$ é mensurável, onde $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ é munido da σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{2n})$ e $\mathbb{R}$ é munido da σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(c) Se o espaço mensurável $\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\big)$ é munido da medida de Lebesgue $\mathfrak{m}$ e se as funções f, g são integráveis, mostre que para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ a função:

$$\mathbb{R}^n \ni y \longmapsto f(x - y)g(y) \in \mathbb{R} \tag{1}$$

é integrável. Se:

$$X = \big\{x \in \mathbb{R}^n : \text{a função (1) é integrável}\big\}$$

mostre que a função $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $(f * g)(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e por:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}(y), \tag{2}$$

para todo $x \in X$ é integrável e que:

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1,$$

onde $\|\cdot\|_1$ denota a norma do espaço de Banach $L^1\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{m}\big)$. (sugestão: use o Teorema de Tonelli).

A função $f * g$ definida no item (c) é chamada a *convolução* de f com g.

(d) Mostre que a operação binária:

$$\begin{aligned} L^1\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{m}\big) \times L^1\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{m}\big) &\longrightarrow L^1\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \mathfrak{m}\big) \\ (f, g) &\longmapsto f * g \end{aligned}$$

é (bem-definida e) associativa, comutativa e bilinear.

(e) Se f é limitada e g é integrável, mostre que a função (1) é integrável para todo $x \in \mathbb{R}^n$; se f é de classe C^k $(0 \le k \le +\infty)$ e possui todas as derivadas parciais até ordem k limitadas, mostre que função $f * g$ definida por (2) para todo $x \in \mathbb{R}^n$ é também de classe C^k.

9. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente de classe C^1 e denote por μ_F a única medida de Borel em $\mathbb{R}$ tal que $\mu_F\big(\,]a, b]\,\big) = F(b) - F(a)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \le b$. Se $\mathfrak{m} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ denota a medida de Lebesgue, mostre que $\mu_F \ll \mathfrak{m}$ e determine a derivada de Radon–Nikodym $\frac{\mathrm{d}\mu_F}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}$.

10. Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam μ, ν medidas definidas na σ-álgebra $\mathcal{A}$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(i) existem medidas ν_{ac} e ν_{s} definidas em $\mathcal{A}$ de modo que $\nu = \nu_{\mathrm{ac}} + \nu_{\mathrm{s}}$, $\nu_{\mathrm{ac}} \ll \mu$ e $\nu_{\mathrm{s}} \perp \mu$;

(ii) existe $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) = 0$ tal que para todo $B \in \mathcal{A}$ com $B \cap A = \emptyset$ e $\mu(B) = 0$ temos que $\nu(B) = 0$.

11. *(generalização do Teorema de decomposição de Lebesgue)* Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e sejam μ, ν medidas definidas na σ-álgebra $\mathcal{A}$; suponha que a medida ν é σ-finita. Mostre que a condição (i) que aparece no enunciado do Exercício 10 é satisfeita (sugestão: supondo por absurdo que a condição não é satisfeita, mostre usando recursão transfinita que existe uma família $(A_\alpha)_{\alpha \in \aleph_1}$ de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos indexada no cardinal $\aleph_1$ de modo que $\mu(A_\alpha) = 0$ e $\nu(A_\alpha) > 0$, para todo $\alpha \in \aleph_1$; obtenha uma contradição usando o resultado do Exercício 6).