Décima-Terceira Lista

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk

23/11/2013

Exercício 1. Seja $M_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$. Mostre que existem vizinhanças abertas U, V da matriz identidade em $M_n(\mathbb{R})$ tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(i) para qualquer $A \in U$, temos $A^2 \in V$;

(ii) para qualquer $B \in V$, existe uma única matriz $A \in U$ tal que A^2 é igual a B;

(iii) a função $\psi : V \to U$ que associa a cada $B \in V$ a única matriz $A \in U$ tal que $A^2 = B$ é de classe C^∞.

Determine $\mathrm{d}\psi(\mathrm{I}) : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, onde $\mathrm{I} \in M_n(\mathbb{R})$ denota a matriz identidade.

Exercício 2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x, y) = \Big(\frac{y_1 + e^{y_2} + 1}{x_1^2 + e^{x_2}}, y_1 \cos(x_2) - y_2 e^{x_1}\Big)$$

para todos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$.

(a) Determine a matriz que representa a transformação linear

$$\partial_y f(0, 0) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

na base canônica.

(b) Mostre que existem vizinhanças abertas U_1 e U_2 da origem em $\mathbb{R}^2$ e uma função $\psi : U_1 \to U_2$ de classe C^∞ tais que, para todos $x \in U_1$, $y \in U_2$, vale que:

$$f(x, y) = (2, 0) \Longleftrightarrow y = \psi(x).$$

Determine a matriz Jacobiana de ψ no ponto 0.

Definição 1. Se M é um espaço métrico e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função, dizemos que um ponto $x \in M$ é um *ponto de máximo local* (resp., *mínimo local*) de f se existe uma vizinhança V de x em M tal que $f(y) \leq f(x)$ (resp., $f(y) \geq f(x)$), para todo $y \in V$.

Exercício 3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto x interior a U. Mostre que se x é um ponto de máximo ou de mínimo local de f então $\mathrm{d}f(x) = 0$. (Sugestão: para $v \in \mathbb{R}^m$, considere a função $g(t) = f(x + tv)$, definida para t numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}$.)

Exercício 4. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Seja $(x_0, y_0) \in U$. Assuma que $\partial_y f(x_0, y_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seja um isomorfismo. Seja $v \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ um elemento do núcleo da transformação linear $\mathrm{d}f(x_0, y_0) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Mostre que existem $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $\gamma : \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\to U$ de classe C^k tal que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$, $\gamma'(0) = v$ e tal que $f \circ \gamma$ seja constante. (Sugestão: seja $c = f(x_0, y_0)$ e use o Teorema da Função Implícita para obter uma função ψ tal que $\psi(x_0) = y_0$ e $f\big(x, \psi(x)\big) = c$, para todo x no domínio de ψ. Escreva $v = (v_1, v_2)$ e defina $\gamma(t) = \big(x_0 + tv_1, \psi(x_0 + tv_1)\big)$.)

Exercício* 5. Seja $F : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^k ($1 \le k \le \infty$) definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^p$ e seja $z_0 \in U$ um ponto tal que $\mathrm{d}F(z_0) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ seja sobrejetora. Se $w \in \mathbb{R}^p$ é um elemento do núcleo de $\mathrm{d}F(z_0)$, mostre que existem $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $\mu : \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[\to U$ de classe C^k tal que $\mu(0) = z_0$, $\mu'(0) = w$ e tal que $F \circ \mu$ seja constante. (Sugestão: mostre primeiro que existe um isomorfismo $T : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ tal que $T\big[\mathbb{R}^m \times \{0\}\big]$ seja igual ao núcleo de $\mathrm{d}F(z_0)$, onde $m = p - n$. Aplique o resultado do Exercício 4 com $f = F \circ T$, $(x_0, y_0) = T^{-1}(z_0)$ e $v = T^{-1}(w)$, obtendo γ. Defina $\mu = T \circ \gamma$.)

Exercício* 6 (método dos multiplicadores de Lagrange)**.** Sejam $U \subset \mathbb{R}^p$ um aberto, $F : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $g : U \to \mathbb{R}$ uma função. Seja $z_0 \in U$ um ponto tal que $\mathrm{d}F(z_0) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ seja sobrejetora e seja $c = F(z_0)$. Suponha que g seja diferenciável no ponto z_0 e que z_0 seja um ponto de máximo ou mínimo local da restrição de g a $F^{-1}(c)$.

(a) Mostre que o funcional linear $\mathrm{d}g(z_0) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ se anula em qualquer vetor $w \in \mathbb{R}^p$ pertencente ao núcleo de $\mathrm{d}F(z_0)$. (Sugestão: obtenha μ como no Exercício 5 e considere a função $g \circ \mu$.)

(b) Recordando que a imagem da aplicação transposta[1] $\mathrm{d}F(z_0)^*$ é precisamente o anulador do núcleo de $\mathrm{d}F(z_0)$, conclua que existe $\lambda \in \mathbb{R}^{n*}$ tal que $\mathrm{d}g(z_0) = \mathrm{d}F(z_0)^* \cdot \lambda$.

(c) Se $(\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n)$ denota a matriz que representa o funcional linear $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na base canônica, mostre que:

$$\mathrm{d}g(z_0) = \mathrm{d}F(z_0)^* \cdot \lambda \iff \nabla g(z_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla F_i(z_0),$$

onde ∇u denota o gradiente de uma aplicação u e F_i, $i = 1, \dots, n$, denotam as funções coordenadas de F.

[1] Se E_1, E_2 são espaços vetoriais e $T : E_1 \to E_2$ é uma transformação linear então a sua *aplicação transposta* $T^* : E_2^* \to E_1^*$ é definida por $T^*(\alpha) = \alpha \circ T$, para todo $\alpha \in E_2^*$. Se E_1, E_2 estão munidos de bases e os espaços duais E_1^*, E_2^* estão munidos das respectivas bases duais, então a matriz que representa T^* é precisamente a transposta da matriz que representa T.