Décima-terceira Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk

10/06/2019

Exercício 1. Considere a superfície parametrizada $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma(x, y) = (x, y, x^2 y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e seja γ uma parametrização da fronteira do retângulo $[0, 1]\times[0, 2]$ que dá uma única volta no retângulo e tal que o segmento ligando os vértices $(0, 0)$ e $(1, 0)$ seja percorrido no sentido do ponto $(0, 0)$ para o ponto $(1, 0)$. Se $\mu = \sigma \circ \gamma$, use o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha $\int_\mu \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, em que $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o campo vetorial cujas funções coordenadas F_1, F_2 e F_3 são definidas por

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= z + e^x \operatorname{sen} y \cos z, \\ F_2(x, y, z) &= x + e^x \cos y \cos z, \\ F_3(x, y, z) &= y - e^x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z, \end{aligned}$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 2. Considere o cilindro

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\big\}$$

e os arcos de círculo C_1 e C_2 em S dados por:

$$\begin{aligned} C_1 &= \big\{(x, y, z) \in S : z = 1,\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\big\}, \\ C_2 &= \big\{(x, y, z) \in S : z = 3,\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\big\}. \end{aligned}$$

Seja γ a curva parametrizada obtida pela concatenação de uma parametrização de C_1 no sentido do ponto $(0, 1, 1)$ para o ponto $(1, 0, 1)$, com uma parametrização do segmento de reta que começa no ponto $(1, 0, 1)$ e termina no ponto $(1, 0, 3)$, com uma parametrização de C_2 no sentido do ponto $(1, 0, 3)$ para o ponto $(0, 1, 3)$, com uma parametrização do segmento de reta que começa no ponto $(0, 1, 3)$ e termina no ponto $(0, 1, 1)$. Use o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha $\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, em que $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o campo vetorial cujas funções coordenadas F_1, F_2 e F_3 são definidas por

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= z^2 + yz \cos(xyz), \\ F_2(x, y, z) &= y^2 + xz \cos(xyz), \\ F_3(x, y, z) &= x^2 + xy \cos(xyz), \end{aligned}$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 3. Seja S a esfera em $\mathbb{R}^3$ de centro na origem e raio 1 e considere os arcos de grande círculo C_1, C_2 e C_3 em S dados por:

$$\begin{aligned} C_1 &= \big\{(x,y,z) \in S : x = 0,\ y \geq 0 \text{ e } z \geq 0\big\},\\ C_2 &= \big\{(x,y,z) \in S : x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } z = 0\big\},\\ C_3 &= \big\{(x,y,z) \in S : x \geq 0,\ y = 0 \text{ e } z \geq 0\big\}. \end{aligned}$$

Seja γ a curva parametrizada obtida pela concatenação de uma parametrização de C_1 no sentido do ponto $(0,0,1)$ para o ponto $(0,1,0)$, com uma parametrização de C_2 no sentido do ponto $(0,1,0)$ para o ponto $(1,0,0)$, com uma parametrização de C_3 no sentido do ponto $(1,0,0)$ para o ponto $(0,0,1)$. Use o Teorema de Stokes para calcular a integral de linha $\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, em que $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o campo vetorial cujas funções coordenadas F_1, F_2 e F_3 são definidas por

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= y + x^2\cos(x^3+y^3+z^3),\\ F_2(x,y,z) &= z + y^2\cos(x^3+y^3+z^3),\\ F_3(x,y,z) &= x^2 + z^2\cos(x^3+y^3+z^3), \end{aligned}$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 4. Considere o cubo $C = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ e o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(xyz + \cos(y^2+z), y^2 + e^{xz}, z - \operatorname{sen}(x^3+y^3)\big),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Se S denota a fronteira do cubo C, use o Teorema de Gauss para calcular o fluxo $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A$, em que $\vec{n}$ é a normal unitária para S que aponta para fora do cubo.

Exercício 5. Considere o pedaço de parabolóide

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 4\big\}$$

e o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(xy - y\operatorname{sen}(z^2), x^3 + z^3, z^2\big),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Use o Teorema de Gauss para calcular o fluxo $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A$, em que $\vec{n}$ é a normal unitária para S tal que $\vec{n}(0,0,0) = (0,0,1)$.

Exercício 6. Considere a semiesfera

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z \geq 0\big\}$$

e o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2 - e^{(y^2+z^2)}, x^2e^{(z^3)}, x^2z^2),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Use o Teorema de Gauss para calcular o fluxo $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A$, em que $\vec{n}$ é a normal unitária para S tal que $\vec{n}(0,0,1) = (0,0,1)$.

Respostas

Exercício 1. Como γ é uma curva fechada simples que parametriza a fronteira de $D = \left]0,1\right[\times \left]0,2\right[$ no sentido positivo em relação a D, temos que o Teorema de Stokes nos dá

$$\int_\mu \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\sigma\circ\gamma} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\sigma|_D} (\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A,$$

em que $\vec{n}$ é a normal unitária canonicamente associada à parametrização σ. O rotacional de $\vec{F}$ é dado por

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})(x,y,z) = (1,1,1),$$

para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ e o seu fluxo em $\sigma|_D$ é igual a:

$$\int_{\sigma|_D} (\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = \int_0^1 \Big(\int_0^2 (1 - x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\cdot$$

Assim:

$$\int_\mu \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{2}{3}\cdot$$

Exercício 2. Consideramos a superfície parametrizada $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z),$$

para quaisquer $\theta, z\in\mathbb{R}$. Seja μ uma curva fechada simples que parametriza a fronteira do retângulo $D = \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\times \left]1,3\right[$ no sentido negativo em relação a D. Temos que $\gamma = \sigma\circ\mu$ e portanto o Teorema de Stokes nos dá

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\sigma\circ\mu}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\int_{\sigma|_D}(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A,$$

em que $\vec{n}$ é a normal unitária canonicamente associada à parametrização $\sigma|_D$. O rotacional de $\vec{F}$ é dado por

$$(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})(x,y,z) = (0, 2z-2x, 0),$$

para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ e o seu fluxo em $\sigma|_D$ é igual a:

$$\int_{\sigma|_D}(\vec{\nabla}\wedge\vec{F})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = \int_1^3\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2z - 2\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}z = 6.$$

Assim:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -6.$$

Exercício 3. Consideramos a superfície parametrizada $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma(\theta, \phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi),$$

para quaisquer $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. Seja μ uma curva fechada simples que parametriza a fronteira do quadrado $D = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ no sentido positivo em relação a D. Temos que $\sigma \circ \mu$ é a concatenação de γ com uma curva constante e portanto:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\sigma\circ\mu} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Usando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\int_{\sigma\circ\mu} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\sigma|_D} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}A,$$

em que $\vec{n}$ é a normal unitária canonicamente associada à parametrização $\sigma|_D$. O rotacional de $\vec{F}$ é dado por

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{F})(x, y, z) = (-1, -2x, -1),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e o seu fluxo em $\sigma|_D$ é igual a:

$$\int_{\sigma|_D} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi + 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}^3\phi + \operatorname{sen}\phi \cos\phi) \,\mathrm{d}\phi \Big) \,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot$$

Assim:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot$$

Exercício 4. O Teorema de Gauss nos dá

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}A = \iiint_C \vec{\nabla} \cdot \vec{F},$$

em que o divergente de $\vec{F}$ é dado por

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})(x, y, z) = yz + 2y + 1,$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Daí:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}A = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big(\int_0^1 (yz + 2y + 1) \,\mathrm{d}z \Big) \,\mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}x = \frac{9}{4} \cdot$$

Exercício 5. Considere o aberto

$$U = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 4\big\}$$

cuja fronteira é a união de S com o disco:

$$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } z = 4\big\}.$$

Como a normal unitária $\vec{n}$ para S aponta para dentro de U, o Teorema de Gauss nos dá

$$\iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A + \int_D \vec{F} \cdot \vec{n}_1\,\mathrm{d}A,$$

em que $\vec{n}_1 = (0,0,1)$ é a normal unitária para D que aponta para fora de U. Temos que o divergente de $\vec{F}$ é dado por

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})(x,y,z) = y + 2z,$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Daí

$$\iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \iiint_U (y + 2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

e usando coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad z = z,$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$$
$$r \in \left]0, +\infty\right[, \quad \theta \in \left]0, 2\pi\right[, \quad z \in \mathbb{R},$$

obtemos:

$$\iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_{r^2}^4 (r\operatorname{sen}\theta + 2z)r\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}r = \frac{128\pi}{3}\,\cdot$$

Temos também

$$\int_D \vec{F} \cdot \vec{n}_1\,\mathrm{d}A = \int_D z^2\,\mathrm{d}A = 16\,\text{área}(D) = 64\pi$$

e portanto:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A = 64\pi - \frac{128\pi}{3} = \frac{64\pi}{3}\,\cdot$$

Exercício 6. Considere o aberto

$$U = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 \text{ e } z > 0\big\}$$

cuja fronteira é a união de S com o disco:

$$D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } z = 0\big\}.$$

Como a normal unitária $\vec{n}$ para S aponta para fora de U, o Teorema de Gauss nos dá

$$\iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A + \int_D \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, \mathrm{d}A,$$

em que $\vec{n}_1 = (0, 0, -1)$ é a normal unitária para D que aponta para fora de U. Temos que o divergente de $\vec{F}$ é dado por

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})(x, y, z) = 2x + 2x^2 z = 2x(1 + xz),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Daí

$$\iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \iiint_U 2x(1 + xz) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

e usando coordenadas esféricas

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = \rho\cos\phi,$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,$$
$$\rho \in \left]0, +\infty\right[, \quad \theta \in \left]0, 2\pi\right[, \quad \phi \in \left]0, \pi\right[,$$

concluímos que a integral tripla $\iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ é igual a:

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\rho^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\phi (1 + \rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi) \, \mathrm{d}\phi \Big) \, \mathrm{d}\theta \Big) \, \mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{12} \cdot$$

Temos também

$$\int_D \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, \mathrm{d}A = \int_D -x^2 z^2 \, \mathrm{d}A = 0$$

e portanto:

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = \iiint_U \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\pi}{12} \cdot$$