Décima-Segunda Lista

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk

16/11/2013

Em todos os exercícios, se T denota uma transformação linear então $\|T\|$ denota a *norma de operadores* de T (associada a uma certa escolha de normas no domínio e no contra-domínio de T), definida por:

$$\|T\| = \sup_{\|v\| \le 1} \|T(v)\|.$$

Normas arbitrárias estão fixadas nos espaços $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$.

Exercício 1. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^m$.

(a) Se $k \ge 0$ é uma constante de Lipschitz para a função f, mostre que $\|\mathrm{d}f(x)\| \le k$, para todo $x \in U$. (Sugestão: use que:

$$\mathrm{d}f(x) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

para todos $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^m$.)

(b) Se U é convexo e $k \ge 0$ é tal que $\|\mathrm{d}f(x)\| \le k$ para todo $x \in U$, mostre que f é Lipschitziana com constante de Lipschitz igual a k.

Exercício 2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua nos pontos de um segmento de reta $[x, x + h] \subset U$ e diferenciável[1] nos pontos do segmento aberto $]x, x + h[$. Mostre que se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear então:

$$\|f(x + h) - f(x) - T(h)\| \le \sup_{t \in]0,1[} \|\mathrm{d}f(x + th) - T\| \, \|h\|.$$

(Sugestão: considere a função $f - T$.)

Exercício 3. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, diferenciável em $U \setminus \{x\}$, onde x é um ponto interior de U. Mostre que se:

$$\lim_{y \to x} \mathrm{d}f(y) = T,$$

para alguma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, então f é diferenciável no ponto x e $\mathrm{d}f(x) = T$. (Sugestão: use o resultado do Exercício 2.)

[1] Estamos supondo que U satisfaça condições que garantam a unicidade da diferencial de f nos pontos de $]x, x + h[$, por exemplo, que $]x, x + h[$ esteja contido no interior do conjunto U.

Exercício 4. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável num aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que se $\mathrm{d}f(x) = 0$ para todo $x \in U$ então f é constante. (Sugestão: trate primeiro o caso em que U é convexo. Trate depois o caso geral mostrando que, dado $c \in \mathbb{R}^n$, o conjunto $f^{-1}(c)$ é aberto e fechado relativamente a U.)

Exercício* 5. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, recordamos que:

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

para $p \in [1, +\infty[$ e que $\|x\|_p = \max\big\{|x_i| : i = 1, \dots, n\big\}$, para $p = +\infty$. Se $\alpha \in \mathbb{R}^{n*}$ é um funcional linear em $\mathbb{R}^n$, definimos também:

$$\|\alpha\|_p = \|(a_1, \dots, a_n)\|_p,$$

onde $a_i = \alpha(e_i)$ e e_i denota o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$ (isto é, a_1, ..., a_n são as entradas da matriz linha que representa α na base canônica de $\mathbb{R}^n$ ou, equivalentemente, as coordenadas de α na base dual da base canônica). O objetivo deste exercício é mostrar que, se $\mathbb{R}^n$ é munido da norma $\|\cdot\|_p$ (e $\mathbb{R}$ é munido do valor absoluto) então:

$$\|\alpha\| = \|\alpha\|_q, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{n*},$$

onde $\|\alpha\|$ denota a norma de operadores de α e $q \in [1, +\infty]$ denota o *expoente conjugado* de $p \in [1, +\infty]$ definido pela igualdade[2]:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(a) Usando a desigualdade de Hölder (item (d), Exercício 6, Primeira Lista), mostre que:

$$|\alpha(x)| \le \|\alpha\|_q \, \|x\|_p, \tag{1}$$

para todos $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^{n*}$. Conclua que $\|\alpha\| \le \|\alpha\|_q$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^{n*}$.

(b) Se $\alpha \in \mathbb{R}^{n*}$ é não nulo, mostre que existe $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo tal que vale a igualdade em (1). (Sugestão: para $p, q \in \,]1, +\infty[$, verifique que vale a igualdade em (1) se tomamos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x_i|^p = |a_i|^q$ e $a_i x_i \ge 0$, para $i = 1, \dots, n$, onde $a_i = \alpha(e_i)$.)

(c) Mostre que $\|\alpha\| = \|\alpha\|_q$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^{n*}$.

---

[2]Obviamente, convencionamos $\frac{1}{+\infty} = 0$.