Décima-segunda Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk
05/06/2019

Exercício 1. Calcule o fluxo $\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A$, para S, $\vec{v}$ e $\vec{n}$ definidos em cada um dos itens abaixo.

(a) S é o pedaço de plano definido por

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \text{ e } x + y + z = 2\big\},$$

$\vec{n}$ é a normal unitária que possui a terceira coordenada negativa e $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o campo vetorial definido por

$$\vec{v}(x, y, z) = (y^2, x^2, xz),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) S é a semiesfera definida por

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x \ge 0\big\},$$

$\vec{n}$ é a normal unitária tal que $\vec{n}(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$ e $\vec{v}$ é o campo vetorial definido por

$$\vec{v}(x, y, z) = (1, x, y),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(c) S é o pedaço de calha cilíndrica definido por

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ y \ge 0 \text{ e } 0 \le z \le 2\big\},$$

$\vec{n}$ é a normal unitária tal que $\vec{n}(0, 1, z)$ tem a segunda coordenada positiva para todo $z \in [0, 2]$ e $\vec{v}$ é o campo vetorial definido por

$$\vec{v}(x, y, z) = (x, z, y^2),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(d) T é o toro obtido pela rotação em torno do eixo z do círculo no plano xz de centro $(2, 0, 0)$ e raio 1, S é a interseção de T com o conjunto

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0 \text{ e } y \ge 0\big\},$$

$\vec{n}$ é a normal unitária que aponta para fora da região delimitada por T (isto é, para fora da componente conexa limitada do complementar de T em $\mathbb{R}^3$) e $\vec{v}$ é o campo vetorial definido por

$$\vec{v}(x, y, z) = (0, x, z),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 2 (invariância por reparametrização)**.** Seja $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada de classe C^1 definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$ e seja $\alpha : U' \to U$ um difeomorfismo de classe C^1 definido num subconjunto aberto U' de $\mathbb{R}^2$. A superfície parametrizada $\sigma' = \sigma \circ \alpha$ é chamada uma *reparametrização* de σ. Denotamos por

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$$

as derivadas parciais de σ num ponto $(u, v) \in U$ e por

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial u'}(u', v') \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma'}{\partial v'}(u', v')$$

as derivadas parciais de σ' num ponto $(u', v') \in U'$.

(a) Mostre que

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial u'}(u', v') \wedge \frac{\partial \sigma'}{\partial v'}(u', v') = \Big(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)\Big) \det\big(J\alpha(u', v')\big),$$

para todo $(u', v') \in U'$, em que $(u, v) = \alpha(u', v')$.

(b) Seja R um subconjunto Jordan mensurável de U tal que $R' = \alpha^{-1}[R]$ seja Jordan mensurável. Seja $f : D \to \mathbb{R}^3$ uma função definida num subconjunto D de $\mathbb{R}^3$ contendo $\sigma[R]$. Mostre que se a integral de superfície

$$\int_{\sigma|_R} f \, \mathrm{d}A = \iint_R f\big(\sigma(u, v)\big) \Big\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \Big\| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

existe, então a integral de superfície

$$\int_{\sigma'|_{R'}} f \, \mathrm{d}A = \iint_{R'} f\big(\sigma'(u', v')\big) \Big\| \frac{\partial \sigma'}{\partial u'}(u', v') \wedge \frac{\partial \sigma'}{\partial v'}(u', v') \Big\| \, \mathrm{d}u' \mathrm{d}v'$$

também existe e é igual a $\int_{\sigma|_R} f \, \mathrm{d}A$.

Definição 1 (faixa de Möbius)**.** Seja $R > 0$ e denote por C o círculo no plano xy de centro na origem e raio R. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, consideramos o ponto

$$p(\alpha) = (R\cos\alpha, R\,\mathrm{sen}\,\alpha, 0)$$

de C; temos então que $p(\alpha)$ dá uma volta completa em C quando α percorre um intervalo de comprimento 2π. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja $\pi(\alpha)$ o plano que contém o eixo z e o ponto $p(\alpha)$, de modo que os vetores

$$\vec{e}_1(\alpha) = (\cos\alpha, \mathrm{sen}\,\alpha, 0) \quad \text{e} \quad \vec{e}_2(\alpha) = (0,0,1)$$

constituem uma base ortonormal de $\pi(\alpha)$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que o vetor

$$\vec{u}(\alpha,\beta) = \vec{e}_1(\alpha)\cos\beta + \vec{e}_2(\alpha)\,\mathrm{sen}\,\beta$$

é um vetor unitário paralelo ao plano $\pi(\alpha)$ que faz um ângulo β com o vetor "horizontal" $\vec{e}_1(\alpha)$; quando fixamos α e deixamos β percorrer um intervalo de comprimento 2π, temos que $\vec{u}(\alpha,\beta)$ descreve um círculo unitário no plano $\pi(\alpha)$.

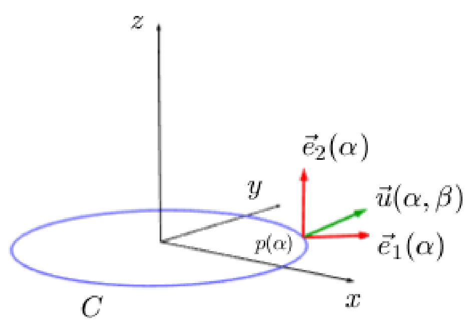

Figura 1. Círculo C, ponto $p(\alpha)$ e vetores $\vec{e}_1(\alpha)$, $\vec{e}_2(\alpha)$ e $\vec{u}(\alpha,\beta)$ com $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $\beta = \frac{\pi}{8}$.

Seja agora dado $L > 0$ com $L < R$ e considere a superfície parametrizada $\sigma : \mathbb{R} \times \left]-L, L\right[\to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\sigma(\alpha, t) = p(\alpha) + t\vec{u}\big(\alpha, \tfrac{1}{2}\alpha\big),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $t \in \left]-L, L\right[$. Note que quando fixamos $\alpha \in \mathbb{R}$ e variamos t em $\left]-L, L\right[$, o ponto $\sigma(\alpha,t)$ descreve um segmento aberto de comprimento $2L$ centrado em $p(\alpha)$ e paralelo ao vetor $\vec{u}\big(\alpha, \frac{1}{2}\alpha\big)$. Quando α vai de 0 a 2π, esse segmento dá um giro completo, já que o ângulo $\frac{1}{2}\alpha$ que $\vec{u}\big(\alpha, \frac{1}{2}\alpha\big)$ faz com a "horizontal" vai de 0 a π. A imagem da aplicação σ é uma superfície regular[1] S de classe C^∞ e ela é conhecida como a *faixa de Möbius*.

[1]Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto de comprimento menor ou igual a 2π, então a restrição de σ a $I \times \left]-L, L\right[$ dá uma parametrização regular para S de classe C^∞. Assim, obtém-se uma demonstração de que S é de fato uma superfície regular de classe C^∞.

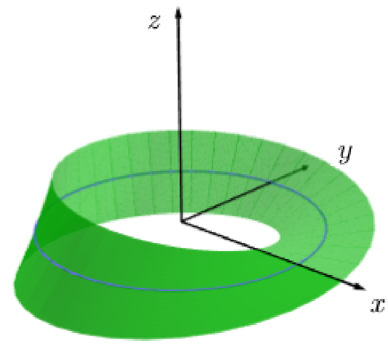

Figura 2. Círculo C e faixa de Möbius S.

Observação. A faixa de Möbius S descrita na Definição 1 é similar (em termos técnicos, *homeomorfa*) à faixa de Möbius que se obtém torcendo um retângulo de papel e colando as extremidades, mas não é *isométrica* a ela, isto é, não existe uma correspondência biunívoca que preserva comprimentos entre os pontos de S e os pontos de uma "faixa de Möbius de papel". De fato, a faixa de Möbius S possui *curvatura Gaussiana* não nula, enquanto que uma superfície obtida torcendo um pedaço de papel plano teria curvatura Gaussiana nula. A parametrização de uma faixa de Möbius que seja isométrica a uma "faixa de Möbius de papel" é mais complicada de se descrever e o problema de encontrar uma parametrização que aproxime o formato real tomado pelo papel torcido é então consideravelmente mais complicado. Para uma discussão, veja Gideon E. Schwarz, *The dark side of the Moebius strip*, The American Mathematical Monthly, vol. 97, no. 10 (dec., 1990), pp. 890—897.

Exercício 3. O objetivo deste exercício é demonstrar que a faixa de Möbius S descrita na Definição 1 não é uma superfície orientável, isto é, não existe uma normal unitária contínua $\vec{n} : S \to \mathbb{R}^3$. Seja σ a parametrização que apresentamos na Definição 1.

(a) Calcule o produto vetorial

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha}(\alpha, t) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t}(\alpha, t),$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $t \in \left]-L, L\right[$. Verifique que esse produto vetorial nunca se anula.

(b) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $t \in \left]-L, L\right[$, defina

$$\vec{N}(\alpha, t) = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha}(\alpha, t) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t}(\alpha, t)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha}(\alpha, t) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial t}(\alpha, t) \right\|}.$$

Supondo por absurdo que exista uma normal unitária contínua $\vec{n}$ para S, mostre que existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ tal que

$$\vec{N}(\alpha, t) = \lambda \vec{n}\big(\sigma(\alpha, t)\big),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $t \in \left]-L, L\right[$.

(c) Usando o resultado do item (b), conclua que $\vec{N}(0, 0) = \vec{N}(2\pi, 0)$. Por um cálculo direto, verifique que $\vec{N}(0, 0) = -\vec{N}(2\pi, 0)$ e obtenha uma contradição, concluindo assim que $\vec{n}$ não pode existir.

Sugestões

Exercício 2. (a) Note que, pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial u'}(u',v') = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\frac{\partial\alpha_1}{\partial u'}(u',v') + \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\frac{\partial\alpha_2}{\partial u'}(u',v'), \tag{1}$$

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial v'}(u',v') = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\frac{\partial\alpha_1}{\partial v'}(u',v') + \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\frac{\partial\alpha_2}{\partial v'}(u',v'), \tag{2}$$

para todo $(u',v') \in U'$, em que $(u,v) = \alpha(u',v')$ e α_1 e α_2 denotam as funções coordenadas de α.

(b) Use o resultado do item (a) e o Teorema de Mudança de Variáveis na integral.

Exercício 3. (a) Para facilitar as contas, note que

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{e}_1(\alpha), \vec{e}_1{}'(\alpha), \vec{e}_2(\alpha)\big\}$$

é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$. Calcule o produto vetorial expressando os vetores $\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}(\alpha,t)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial t}(\alpha,t)$ na base $\mathcal{B}$.

(b) Como $\vec{N}(\alpha,t)$ e $\vec{n}\big(\sigma(\alpha,t)\big)$ são ambos vetores unitários e normais ao plano tangente a S no ponto $\sigma(\alpha,t)$ temos que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $t \in \,]-L,L[$, existe $\lambda(\alpha,t) \in \{-1,1\}$ tal que

$$\vec{N}(\alpha,t) = \lambda(\alpha,t)\vec{n}\big(\sigma(\alpha,t)\big).$$

Note que

$$\lambda(\alpha,t) = \vec{N}(\alpha,t)\cdot\vec{n}\big(\sigma(\alpha,t)\big),$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $t \in \,]-L,L[$ e conclua que a função λ é contínua.

Respostas

Exercício 1. (a) Usamos a parametrização injetiva

$$\sigma(x,y) = (x, y, 2-x-y), \quad x, y \in [0,1]$$

para S. Temos que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = (1,1,1)$$

possui o sentido oposto de $\vec{n}$ e portanto:

$$\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = -\int_0^1 \Big(\int_0^1 \big(y^2 + 2x - xy\big)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x = -\frac{13}{12}\cdot$$

(b) Usamos a parametrização injetiva

$$\sigma(\theta,\phi) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \cos\phi), \quad \theta \in \big[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big],\ \phi \in \,]0,\pi[$$

para S menos os polos $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$ (que são irrelevantes para a integral). Temos que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta,\phi) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\phi}(\theta,\phi) = -(\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, \operatorname{sen}\phi\cos\phi)$$

possui o sentido oposto de $\vec{n}$ e portanto:

$$\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^\pi (-\cos\theta\operatorname{sen}^2\phi - \operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}^3\phi \\ - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi\Big)\,\mathrm{d}\theta = \pi.$$

(c) Usamos a parametrização injetiva

$$\sigma(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z), \quad \theta \in [0,\pi],\ z \in [0,2]$$

para S. Temos que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta,z) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial z}(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

possui o mesmo sentido de $\vec{n}$ e portanto:

$$\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = \int_0^2 \Big(\int_0^\pi (\cos^2\theta + z\operatorname{sen}\theta)\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}z = \pi + 4.$$

(d) Usamos a parametrização injetiva

$\sigma(\alpha,\theta) = \big((2+\cos\alpha)\cos\theta, (2+\cos\alpha)\,\mathrm{sen}\,\theta, \mathrm{sen}\,\alpha\big), \quad \theta \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big],\ \alpha \in [0, 2\pi[\,,$

de S. Temos que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}(\alpha,\theta) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\alpha,\theta) = -(2+\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\theta, \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta, \mathrm{sen}\,\alpha)$$

possui o sentido oposto de $\vec{n}$ e portanto:

$$\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\pi} -(2+\cos\alpha)[(2+\cos\alpha)\cos\alpha\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}^2\alpha]\,\mathrm{d}\alpha\Big)\,\mathrm{d}\theta = \pi^2 + 2\pi.$$

Exercício 2. (a) Usando as igualdades (1) e (2) e as propriedades do produto vetorial, obtemos

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial u'}(u',v') \wedge \frac{\partial\sigma'}{\partial v'}(u',v') = \frac{\partial\alpha_1}{\partial u'}(u',v')\frac{\partial\alpha_2}{\partial v'}(u',v')\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\Big) - \frac{\partial\alpha_2}{\partial u'}(u',v')\frac{\partial\alpha_1}{\partial v'}(u',v')\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\Big)$$

e a conclusão segue notando que:

$$\det\big(J\alpha(u',v')\big) = \frac{\partial\alpha_1}{\partial u'}(u',v')\frac{\partial\alpha_2}{\partial v'}(u',v') - \frac{\partial\alpha_2}{\partial u'}(u',v')\frac{\partial\alpha_1}{\partial v'}(u',v').$$

(b) Do resultado do item (a) segue que

$$\Big\|\frac{\partial\sigma'}{\partial u'}(u',v') \wedge \frac{\partial\sigma'}{\partial v'}(u',v')\Big\| = \Big\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\Big\|\big|\det\big(J\alpha(u',v')\big)\big|,$$

para todo $(u',v') \in U'$, em que $(u,v) = \alpha(u',v')$. Daí basta usar a substituição de variáveis

$$(u,v) = \alpha(u',v'), \quad \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \big|\det\big(J\alpha(u',v')\big)\big|\,\mathrm{d}u'\mathrm{d}v'$$

na integral que define $\int_{\sigma'|_{R'}} f\,\mathrm{d}A$.

Exercício 3. (a) Temos

$$\sigma(\alpha, t) = \big(R + t\cos\tfrac{\alpha}{2}\big)\vec{e}_1(\alpha) + \vec{e}_2(\alpha)t\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\alpha}{2}\,,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $t \in \,]-L, L[$. Assim, se $\mathcal{B}$ é a base ortonormal positiva que aparece na sugestão, temos:

$$\tfrac{\partial\sigma}{\partial\alpha}(\alpha, t) = \big(-\tfrac{1}{2}t\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\alpha}{2}, R + t\cos\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}t\cos\tfrac{\alpha}{2}\big)_{\mathcal{B}} \quad \text{e}$$

$$\tfrac{\partial\sigma}{\partial t}(\alpha, t) = \big(\cos\tfrac{\alpha}{2}, 0, \mathrm{sen}\,\tfrac{\alpha}{2}\big)_{\mathcal{B}}\,.$$

Portanto:

$$\tfrac{\partial\sigma}{\partial\alpha}(\alpha, t) \wedge \tfrac{\partial\sigma}{\partial t}(\alpha, t) = \Big(\big(R + t\cos\tfrac{\alpha}{2}\big)\,\mathrm{sen}\,\tfrac{\alpha}{2}, \tfrac{1}{2}t, -\big(R + t\cos\tfrac{\alpha}{2}\big)\cos\tfrac{\alpha}{2}\Big)_{\mathcal{B}}\,.$$

Se o produto vetorial $\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}(\alpha, t) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial t}(\alpha, t)$ fosse nulo, então seguiria que $t = 0$ e também que $\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} = 0$, o que não é possível.

(b) Continuando o raciocínio apresentado na sugestão, temos que a função λ é contínua, já que é igual ao produto escalar de duas funções contínuas. Como o domínio $\mathbb{R} \times \,]-L, L[$ de λ é conexo, segue que a imagem de λ é um intervalo. Do fato que a imagem de λ está contida em $\{-1, 1\}$ conclui-se então que a função λ é constante.

(c) Pelo resultado do item (b), temos

$$\vec{N}(0, 0) = \lambda\vec{n}\big(\sigma(0, 0)\big) = \lambda\vec{n}\big(\sigma(2\pi, 0)\big) = \vec{N}(2\pi, 0),$$

já que $\sigma(0, 0) = \sigma(2\pi, 0)$. Por outro lado, usando o resultado do item (a), obtemos

$$\vec{N}(0, 0) = (0, 0, -1) \quad \text{e} \quad N(2\pi, 0) = (0, 0, 1),$$

o que nos dá uma contradição.