Décima-segunda Lista

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

14/11/2018

Exercício 1. Em cada um dos itens abaixo, encontre uma equação paramétrica para a reta tangente à curva C dada no ponto $p \in C$ dado.

(a) $C = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1 \text{ e } x^2 + y^2 - z^2 = 1\big\}$ e $p = (1, 1, 1)$;

(b) $C = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + yz = 3 \text{ e } x + y^3 + z^2 = 4\big\}$ e $p = (2, 1, 1)$;

(c) $C = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x^3 + yz - 6 \text{ e } x^2yz = 6\big\}$ e $p = (1, 2, 3)$.

Exercício 2. Seja $f : C \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y, z) = xy + z,$$

para todo $(x, y, z) \in C$, em que:

$$C = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3 \text{ e } x + y + z = 1\big\}.$$

Encontre os pontos de máximo e mínimo global de f.

Exercício 3. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y, z) = xy + z^2,$$

para todo $(x, y, z) \in D$, em que:

$$D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 \leq z \text{ e } z \leq 1 - x - y\big\}.$$

Encontre os pontos de máximo e mínimo global de f.

Exercício 4. Em cada um dos itens abaixo, determine os pontos críticos da função f dada e decida se cada um desses pontos críticos é um mínimo local estrito, um máximo local estrito ou um ponto de sela.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = ax^2 + by^2,$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $a, b > 0$ são fixados;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = ax^2 - by^2,$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, em que $a, b > 0$ são fixados;

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = xy,$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 8x + 6y,$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = x^2 - y + xy^2,$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = x^2 + 2y - 2x^4 - y^2,$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

O próximo exercício é um exercício de Cálculo I que servirá como preparação para o exercício estrelado que vem a seguir.

Exercício 5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in I$. Mostre que se $x_0 \in I$ é um ponto crítico de f (isto é, se $f'(x_0) = 0$), então x_0 é um ponto de mínimo global de f. (Sugestão: note que a função f' é crescente e estude o sinal de f'.)

Exercício* 6 (critério para que um ponto crítico seja um mínimo global)**.** Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função[1] de classe C^2 num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$. Suponha que a matriz Hessiana

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

tenha determinante maior ou igual a zero para todo $(x,y) \in U$ e que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \geq 0,$$

para todo $(x,y) \in U$. Seja $(x_0, y_0) \in U$ um ponto crítico de f e suponha que, para todo $(x,y) \in U$, o segmento de reta ligando (x_0,y_0) a (x,y) esteja contido em U (isso é verdade, por exemplo, se U for um conjunto convexo[2]). Mostre que (x_0,y_0) é um ponto de mínimo global de f. (Sugestão: dado $(x,y) \in U$, defina $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $g(t) = f\big((x_0,y_0) + t(x - x_0, y - y_0)\big)$, para todo $t \in [0,1]$. Mostre que $g'(0) = 0$ e que $g''(t) \geq 0$, para todo $t \in [0,1]$. Usando o resultado do Exercício 5, conclua que $g(0) \leq g(1)$.)

---

[1]Seria suficiente, na verdade, supor apenas que f seja duas vezes diferenciável em U, isto é, que f seja diferenciável e tenha derivadas parciais diferenciáveis em U. Essa hipótese é suficiente para garantir a igualdade $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

[2]Um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ é dito *convexo* se para quaisquer pontos $p, q \in S$ vale que o segmento de reta ligando p a q está contido em S, isto é, $p + t(q - p) \in S$, para todo $t \in [0,1]$.

Respostas

Exercício 1.

(a) $$\begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 1, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

(b) $$\begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 1 - 2\lambda, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

(c) $$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 + 2\lambda, \\ z = 3 - 3\lambda, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exercício 2. A existência de máximo e mínimo global para f é garantida pelo Teorema de Weierstrass, já que f é contínua e C é compacto e não vazio. Os candidatos a máximo ou mínimo global para f obtidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange são

$$(1,1,-1), \quad \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{3}\right), \quad \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right),$$

sendo que $\left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{3}\right)$ é um ponto de máximo global e

$$\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

são pontos de mínimo global.

Exercício 3. A existência de máximo e mínimo global para f é garantida pelo Teorema de Weierstrass, já que f é contínua e D é compacto e não vazio. O único ponto crítico da restrição de f ao interior de D é $(0,0,0)$. Os candidatos a máximo ou mínimo para a restrição de f ao pedaço de parabolóide

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 1 \text{ e } z < 1 - x - y\big\}$$

obtidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange são:

$$(0,0,-1), \quad \Big(\sqrt{\tfrac{3}{8}}, \sqrt{\tfrac{3}{8}}, -\tfrac{1}{4}\Big), \quad \Big(-\sqrt{\tfrac{3}{8}}, -\sqrt{\tfrac{3}{8}}, -\tfrac{1}{4}\Big),$$

$$\Big(\sqrt{\tfrac{5}{8}}, -\sqrt{\tfrac{5}{8}}, \tfrac{1}{4}\Big) \quad \text{e} \quad \Big(-\sqrt{\tfrac{5}{8}}, \sqrt{\tfrac{5}{8}}, \tfrac{1}{4}\Big).$$

O único candidato a máximo ou mínimo para a restrição de f ao pedaço de plano

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x - y \text{ e } x^2 + y^2 - 1 < z\big\}$$

obtido pelo método dos multiplicadores de Lagrange é $\big(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\big)$. Os candidatos a máximo ou mínimo para a restrição de f à curva

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 1 \text{ e } z = 1 - x - y\big\}$$

obtidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange são:

$$\Big(\tfrac{1+\sqrt{11}}{4}, \tfrac{1-\sqrt{11}}{4}, \tfrac{1}{2}\Big), \quad \Big(\tfrac{1-\sqrt{11}}{4}, \tfrac{1+\sqrt{11}}{4}, \tfrac{1}{2}\Big),$$

$$\Big(\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, 2-\sqrt{5}\Big) \quad \text{e} \quad \Big(\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \tfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}\Big).$$

Os pontos de mínimo global de f são

$$\Big(\sqrt{\tfrac{5}{8}}, -\sqrt{\tfrac{5}{8}}, \tfrac{1}{4}\Big) \quad \text{e} \quad \Big(-\sqrt{\tfrac{5}{8}}, \sqrt{\tfrac{5}{8}}, \tfrac{1}{4}\Big)$$

e o ponto de máximo global de f é:

$$\Big(\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \tfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}\Big).$$

Exercício 4.

(a) $(0,0)$ é o único ponto crítico e é um ponto de mínimo local estrito;

(b) $(0,0)$ é o único ponto crítico e é um ponto de sela;

(c) $(0,0)$ é o único ponto crítico e é um ponto de sela;

(d) $\big(-\frac{9}{5}, -\frac{2}{5}\big)$ é o único ponto crítico e é um ponto de mínimo local estrito;

(e) $\big(-\frac{1}{2}, -1\big)$ é o único ponto crítico e é um ponto de sela;

(f) os pontos críticos são $(0,1)$, $\big(\frac{1}{2}, 1\big)$ e $\big(-\frac{1}{2}, 1\big)$, sendo que $(0,1)$ é um ponto de sela e $\big(\frac{1}{2}, 1\big)$ e $\big(-\frac{1}{2}, 1\big)$ são pontos de máximo local estritos.