Décima-Primeira Lista

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk

09/11/2013

Nos exercícios a seguir, quando dizemos que uma função f é diferenciável num ponto x de seu domínio U, estamos supondo implicitamente que U satisfaz condições que garantam a unicidade da diferencial $\mathrm{d}f(x)$. A unicidade de $\mathrm{d}f(x)$ está garantida, por exemplo, quando x é um ponto interior de U ou quando U está contido em $\mathbb{R}$ e x é um ponto de acumulação de U. (Veja a Décima Lista para mais detalhes.)

Exercício 1. Considere a função $\phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ definida por:

$$\phi(A) = AA^{\mathrm{t}},$$

para todo $A \in M_n(\mathbb{R})$, onde A^{t} denota a transposta da matriz A.

(a) Mostre que ϕ é diferenciável e que:

$$\mathrm{d}\phi(A) \cdot H = HA^{\mathrm{t}} + AH^{\mathrm{t}},$$

para quaisquer $A \in M_n(\mathbb{R})$, $H \in M_n(\mathbb{R})$.

(b) Seja $\mathrm{O}(n)$ o conjunto das matrizes ortogonais $n \times n$, isto é:

$$\mathrm{O}(n) = \phi^{-1}(\mathrm{I}) = \big\{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^{\mathrm{t}} = \mathrm{I}\big\}.$$

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to M_n(\mathbb{R})$ uma função diferenciável num ponto $x \in U$. Supondo que a imagem de f esteja contida em $\mathrm{O}(n)$, mostre que:

$$\big(\mathrm{d}f(x) \cdot v\big) f(x)^{-1}$$

é uma matriz anti-simétrica, para todo $v \in \mathbb{R}^m$.

Exercício 2. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável num ponto $x \in U$. Suponha que a imagem de f esteja contida num subespaço vetorial E de $\mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que a imagem de $\mathrm{d}f(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ está contida em E. (Sugestão: escreva E como núcleo de uma transformação linear T e note que $T \circ f = 0$.)

(b) Se $f_0 : U \to E$ denota a função obtida de f por mudança de contra-domínio, mostre que f_0 também é diferenciável no ponto x e que $\mathrm{d}f_0(x) : \mathbb{R}^m \to E$ e $\mathrm{d}f(x)$ diferem apenas pelo contra-domínio.

Exercício 3.

(a) Seja $\psi : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ uma função diferenciável num ponto $x_0 \in U$, onde $\mathrm{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ denota o espaço das transformações lineares de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$. Fixado $w \in \mathbb{R}^m$, denote por $\psi^w : U \to \mathbb{R}^n$ a função definida por:
$$\psi^w(x) = \psi(x) \cdot w,$$
para todo $x \in U$. Mostre que ψ^w é diferenciável no ponto x_0 e que:
$$\mathrm{d}\psi^w(x_0) \cdot v = \big(\mathrm{d}\psi(x_0) \cdot v\big) \cdot w,$$
para todo $v \in \mathbb{R}^p$.

(b) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^m$ e suponha que a sua diferencial $\mathrm{d}f : U \to \mathrm{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ também seja diferenciável num ponto $x_0 \in U$. Denote por:
$$\mathrm{d}^2 f(x_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$
a diferencial de $\mathrm{d}f$ no ponto x_0. Dados $v, w \in \mathbb{R}^m$, defina:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial v}(x_0),$$
onde $g = \frac{\partial f}{\partial w} : U \to \mathbb{R}^n$. Mostre que:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(x_0) = \big(\mathrm{d}^2 f(x_0) \cdot v\big) \cdot w.$$
(Sugestão: se $\psi = \mathrm{d}f$, quem é ψ^w?)

Exercício 4. O corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos é um espaço vetorial real de dimensão finita (que podemos identificar com $\mathbb{R}^2$, através do isomorfismo $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x+iy \in \mathbb{C}$) e portanto a noção de diferenciabilidade que estudamos no curso faz sentido para uma função $f : U \to \mathbb{C}$ definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$. Se f for diferenciável então, para todo $z \in U$, a sua diferencial $\mathrm{d}f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ num ponto $z \in U$ é linear, isto é, temos:

$$\mathrm{d}f(z)(h_1+h_2) = \mathrm{d}f(z)\cdot h_1 + \mathrm{d}f(z)\cdot h_2, \quad \mathrm{d}f(z)(\lambda h) = \lambda\big(\mathrm{d}f(z)\cdot h\big), \tag{1}$$

para quaisquer $h_1, h_2, h \in \mathbb{C}$ e qualquer λ *real*. Se (1) vale para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, dizemos então que $\mathrm{d}f(z)$ é $\mathbb{C}$-linear. Quando f é diferenciável e $\mathrm{d}f(z)$ é $\mathbb{C}$-linear para todo $z \in U$ diz-se que f é *analítica* (ou *homolorfa*).

(a) Mostre que $\mathrm{d}f(z)$ é $\mathbb{C}$-linear se e somente se $\mathrm{d}f(z)\cdot i = i\big(\mathrm{d}f(z)\cdot 1\big)$.

(b) Conclua que uma função diferenciável f é holomorfa se e somente se:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z), \tag{2}$$

para todo $z \in U$.

(c) Se $f(z) = u(z) + iv(z)$, $z \in U$, com $u : U \to \mathbb{R}$, $v : U \to \mathbb{R}$, verifique que (2) é equivalente às chamadas *equações de Cauchy–Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z).$$

Exercício* 5. Sejam $E_1, \ldots, E_n$, F espaços vetoriais reais. Uma função $B : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é dita *n-linear* (ou *multilinear*) se for linear em cada uma de suas n variáveis, isto é, se para todo $i = 1, \ldots, n$ e quaisquer $x_j \in E_j$, $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, a aplicação:

$$E_i \ni x \longmapsto B(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in F$$

for linear. Supondo os espaços vetorais $E_1, \ldots, E_n$, F munidos de normas (todas denotadas por $\|\cdot\|$), mostre que as seguintes condições são equivalentes a respeito de uma aplicação multilinear $B : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$:

(i) B é contínua no ponto $(0, \ldots, 0)$;

(ii) $\|B\| < +\infty$, onde:

$$\|B\| = \sup\big\{\|B(x_1, \ldots, x_n)\| : x_i \in E_i,\ \|x_i\| \le 1,\ i = 1, \ldots, n\big\};$$

(iii) existe $c \ge 0$ tal que:

$$\|B(x_1, \ldots, x_n)\| \le c\|x_1\|\cdots\|x_n\|, \tag{3}$$

para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$;

(iv) B é contínua.

Quando $\|B\| < +\infty$, note que a desigualdade (3) vale justamente com c igual a $\|B\|$.

Exercício* 6. Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais reais normados. Mostre que se $E_1, \ldots, E_n$ têm dimensão finita então toda aplicação multilinear $B : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é contínua.

Exercício* 7. Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais reais normados de dimensão finita. Mostre que toda aplicação multilinear $B : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ é diferenciável e que sua diferencial é dada por:

$$\mathrm{d}B(x_1, \ldots, x_n) \cdot (h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} B(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

para quaisquer $x_i, h_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$.