Décima-primeira Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk

01/06/2019

Exercício 1. Em cada um dos itens abaixo, determine um potencial f para o campo conservativo $\vec{F}$ dado, isto é, encontre uma função f de classe C^1 com o mesmo domínio que $\vec{F}$ tal que $\nabla f = \vec{F}$.

(a) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por
$$\vec{F}(x, y) = (xy^2, x^2 y),$$
para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ é definido por
$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}}\,,$$
para todo $(x, y, z) \in U$, em que U denota a bola aberta em $\mathbb{R}^3$ de centro na origem e raio 1.

(c) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por
$$\vec{F}(x, y) = (\cos x + \cos y, -x \operatorname{sen} y + y),$$
para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ é definido por
$$\vec{F}(x, y) = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}\,,$$
para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(e) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é definido por
$$\vec{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y),$$
para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 2. Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha $\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, para $\vec{F}$ e γ definidos em cada um dos itens abaixo.

(a) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por

$$\vec{F}(x, y) = (x^2y^2, x + y^3),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e γ é uma parametrização da fronteira do retângulo $[1, 3] \times [2, 4]$ que dá uma única volta no retângulo e tal que o segmento ligando os vértices $(1, 2)$ e $(3, 2)$ é percorrido no sentido do ponto $(1, 2)$ para o ponto $(3, 2)$.

(b) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por

$$\vec{F}(x, y) = (y^2, x^2),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e γ é uma parametrização do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(0, 1)$ que dá uma única volta no triângulo e tal que o segmento ligando os vértices $(0, 1)$ e $(2, 0)$ é percorrido no sentido do ponto $(0, 1)$ para o ponto $(2, 0)$.

(c) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por

$$\vec{F}(x, y) = (xy + \cos x, e^{y^2} + x^3),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e γ é obtida pela concatenação de uma parametrização do segmento de reta que começa no ponto $(-1, 0)$ e termina no ponto $(-1, -2)$, com uma parametrização do segmento de reta que começa no ponto $(-1, -2)$ e termina no ponto $(1, -2)$, com uma parametrização do segmento de reta que começa no ponto $(1, -2)$ e termina no ponto $(1, 0)$, com uma parametrização do semicírculo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \geq 0\}$$

no sentido do ponto $(1, 0)$ para o ponto $(-1, 0)$.

(d) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por

$$\vec{F}(x, y) = (2x + 3y + \cos x, x - 3y + ye^y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e γ é uma parametrização do hexágono regular inscrito na circunferência de centro na origem e raio 1 que possui o ponto $(1, 0)$ como vértice; a curva γ dá uma única volta no hexágono e o sentido de γ é aquele tal que se t_0 satisfaz $\gamma(t_0) = (1, 0)$, então $\gamma(t)$ tem a segunda coordenada negativa para $t > t_0$ suficientemente próximo de t_0.

Exercício 3. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva fechada simples de classe C^1 por partes e seja U o interior de γ (isto é, a componente conexa limitada do complementar em $\mathbb{R}^2$ da imagem de γ). Suponha que γ esteja parametrizada no sentido positivo em relação a U. Mostre que a área de U é igual à integral de linha $\int_\gamma x\,\mathrm{d}y$.

Exercício 4. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ uma curva fechada simples de classe C^1 por partes e seja U o interior de γ. Considere o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\vec{F}(x, y) = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2},$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostre que:

(a) se a origem não está em U, então $\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$;

(b) se a origem está em U e γ está parametrizada no sentido positivo em relação a U, então $\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\pi$.

Definição 1. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ uma curva parametrizada contínua. Uma *função ângulo* para γ é uma função contínua $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t) = \|\gamma(t)\| \big(\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t)\big),$$

para todo $t \in [a, b]$. Informalmente, uma função ângulo para γ é uma escolha que depende continuamente do parâmetro t de um valor $\theta(t)$ para a coordenada polar θ do ponto $\gamma(t)$. É possível mostrar[1] que toda curva parametrizada contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ admite uma função ângulo. Além do mais, se a curva for de classe C^k, então a função ângulo também será de classe C^k e se a curva for de classe C^k por partes então a função ângulo também será de classe C^k por partes. Se θ_1 e θ_2 são duas funções ângulo para a mesma curva γ, então $\theta_1 - \theta_2$ é uma função contínua em $[a, b]$ que só assume valores que são múltiplos inteiros de 2π; segue então do Teorema do Valor Intermediário que $\theta_1 - \theta_2$ é constante, ou seja, duas funções ângulo para uma dada curva sempre diferem por uma constante (que é um múltiplo inteiro de 2π). Concluímos que a diferença $\theta(b) - \theta(a)$ não depende da escolha da função ângulo θ e ela é chamada o *ângulo varrido* pela curva parametrizada γ. Se γ é uma curva fechada, então $\theta(b) - \theta(a)$ é um múltiplo inteiro de 2π e o número inteiro $\frac{1}{2\pi}\big(\theta(b) - \theta(a)\big)$ é chamado o *número de voltas* que γ dá em torno da origem.

[1]A idéia da prova é particionar o intervalo $[a, b]$ em intervalos $[t_i, t_{i+1}]$ de modo que a imagem da restrição de γ a cada $[t_i, t_{i+1}]$ esteja contida num aberto U_i do plano em que é possível obter uma função $\theta_i : U_i \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ que associa a cada ponto de U_i uma escolha de valor para a coordenada polar θ desse ponto. Para que θ_i exista basta que U_i omita uma semireta saindo da origem. A prova rigorosa da existência dessa partição usa argumentos de compacidade que estão fora do escopo do curso de Cálculo. A função ângulo θ é agora definida fazendo $\theta(t) = \theta_i\big(\gamma(t)\big) + 2\pi k_i$, para todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$ e todo i, em que os k_i são inteiros escolhidos de modo que esses vários pedaços da função ângulo se emendem corretamente, isto é, de modo que $\theta_i\big(\gamma(t_{i+1})\big) + 2\pi k_i = \theta_{i+1}\big(\gamma(t_{i+1})\big) + 2\pi k_{i+1}$ para todo i.

Exercício 5. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ uma curva de classe C^1 por partes e seja $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função ângulo para γ. Considere o campo vetorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definido no enunciado do Exercício 4.

(a) Mostre que
$$\theta'(t) = \vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t),$$
para todo $t \in [a,b]$ em que γ é derivável.

(b) Mostre que a integral de linha $\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ é igual ao ângulo varrido pela curva γ.

Sugestões

Exercício 3. Use o Teorema de Green para o aberto U.

Exercício 4. (a) Use o Teorema de Green para o aberto U. Uma outra abordagem seria usar o fato que se a origem não está no interior de uma curva contínua fechada simples γ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, então existe uma homotopia com extremos fixos em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ entre γ e uma curva constante. A conclusão segue então do fato que a integral de linha de $\vec{F}$ se mantém estável por homotopias com extremos fixos dentro do domínio de $\vec{F}$, já que a Jacobiana de $\vec{F}$ é simétrica. Porém, enquanto é de fato verdade que uma tal homotopia existe e é razoável acreditar nisso olhando para um desenho, não é tão simples demonstrar esse fato[2].

(b) Use o Teorema de Green para o aberto $U \setminus D$, em que D é um disco fechado de centro na origem contido em U.

Exercício 5. (a) Seja $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$\Psi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta),$$

para todo $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ e seja $r(t) = \|\gamma(t)\|$, para todo $t \in [a, b]$. Note que

$$\gamma(t) = \Psi\big(r(t), \theta(t)\big),$$

para todo $t \in [a, b]$ e derive os dois lados dessa igualdade com respeito a t.

[2]Uma estratégia para demonstrar isso seria mostrar primeiro que o número de voltas (veja Definição 1) que uma curva contínua fechada γ dá em torno de um ponto p mantém-se constante quando variamos p dentro de uma componente conexa do complementar da imagem de γ em $\mathbb{R}^2$. A partir daí é possível concluir que uma curva contínua fechada simples dá zero voltas em torno de pontos do seu exterior. A conclusão é obtida então usando o fato que se uma curva fechada contínua γ dá zero voltas em torno de um ponto p, então γ é homotópica com extremos fixos a uma curva constante em $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$. Cada um desses fatos requer um certo trabalho não trivial para ser demonstrado.

Respostas

Exercício 1. (a) $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$;
(b) $f(x,y,z)=-\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}$, para todo $(x,y,z)\in U$;
(c) $f(x,y)=\operatorname{sen}x+x\cos y+\frac{1}{2}y^2$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$;
(d) $f(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$;
(e) $f(x,y,z)=xy+xz+yz$, para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Exercício 2. (a) Temos:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_1^3\Big(\int_2^4(1-2x^2y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x=-100.$$

(b) Temos:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=-\int_0^2\Big(\int_0^{-\frac{1}{2}x+1}(2x-2y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\cdot$$

(c) Temos

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{-1}^1\Big(\int_{-2}^0(3x^2-x)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x+\iint_D(3x^2-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ =4+\iint_D(3x^2-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

em que $D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\le 1\text{ e }y\ge 0\big\}$. Usando coordenadas polares, obtemos

$$\iint_D(3x^2-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\Big(\int_0^\pi(3r^2\cos^2\theta-r\cos\theta)r\,\mathrm{d}\theta\Big)\,\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{8}$$

e portanto:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=4+\frac{3\pi}{8}\cdot$$

(d) Temos

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=-\iint_D -2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\,\text{área}(D),$$

em que D é a região hexagonal delimitada por γ. Daí:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=3\sqrt{3}.$$

Exercício 4. (a) Denotando as funções coordenadas de $\vec{F}$ por P e Q, um cálculo simples mostra que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Usando o Teorema de Green para o aberto U, obtemos

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \pm \iint_U \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \Big) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

em que o sinal $\pm$ será $+$ se γ estiver parametrizada no sentido positivo em relação a U e será $-$ caso contrário. Note que as hipóteses do Teorema de Green estão satisfeitas: em particular, vale que o fecho de U, que é a união de U com a imagem de γ, está contido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, que é um aberto em que $\vec{F}$ é de classe C^1.

(b) Como $0 \in U$ e U é aberto, existe $r > 0$ tal que o disco fechado D de centro na origem e raio r está contido em U. Vamos aplicar o Teorema de Green para o aberto $U \setminus D$. Note que a origem não está no fecho de $U \setminus D$, de modo que $\vec{F}$ é de classe C^1 no aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ que contém o fecho de $U \setminus D$. Considere a curva parametrizada $\mu : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mu(t) = (r\cos t, -r \operatorname{sen} t),$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$. Temos que a fronteira de $U \setminus D$ é a união disjunta da imagem de γ com a imagem de μ, sendo ambas parametrizadas no sentido positivo em relação a $U \setminus D$. Daí

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_\mu \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{U \setminus D} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \Big) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Como

$$\int_\mu \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} -1 \,\mathrm{d}t = -2\pi,$$

concluímos que $\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\pi$.

Exercício 5. (a) Continuando o argumento que foi apresentado na sugestão, temos
$$\gamma'(t) = J\Psi\big(r(t),\theta(t)\big)\begin{pmatrix} r'(t) \\ \theta'(t)\end{pmatrix},$$
para todo $t \in [a,b]$ em que γ é derivável. A matriz Jacobiana $J\Psi(r,\theta)$ é dada por
$$J\Psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix},$$
para todo $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ e a sua inversa é
$$\big[J\Psi(r,\theta)\big]^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$
se $r \neq 0$. Logo
$$\begin{pmatrix} r'(t) \\ \theta'(t)\end{pmatrix} = \big[J\Psi\big(r(t),\theta(t)\big)\big]^{-1}\gamma'(t)$$
e portanto
$$\theta'(t) = \frac{1}{r(t)}\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta(t) & \cos\theta(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t)\end{pmatrix},$$
em que $x(t)$ e $y(t)$ são tais que $\gamma(t) = \big(x(t),y(t)\big)$, para todo $t \in [a,b]$. Logo
$$\begin{aligned}\theta'(t) &= \frac{1}{r(t)^2}\begin{pmatrix} -r(t)\operatorname{sen}\theta(t) & r(t)\cos\theta(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t)\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x(t)^2+y(t)^2}\begin{pmatrix} -y(t) & x(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t)\end{pmatrix} = \vec{F}\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t),\end{aligned}$$
como queríamos.

(b) Basta usar o resultado do item (a) e o Teorema Fundamental do Cálculo, como segue:
$$\int_\gamma \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \theta'(t)\,\mathrm{d}t = \theta(b)-\theta(a).$$