Décima Primeira Lista

MAT0206 – Análise Real
MAP0216 – Introdução à Análise Real

Prof. Daniel Victor Tausk
23/06/2012

A título de recordação, as definições e resultados vistos em aula (e também algumas demonstrações) foram colocados na lista.

As seguintes proposições foram vistas em aula.

Proposição 1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Se f é contínua e injetora então f é monótona.*

Demonstração. Se f não for monótona, o Lema 1 (abaixo) nos dá um subconjunto S de I com exatamente 3 elementos tal que $f|_S$ não é monótona. Escreva $S = \{a, b, c\}$, com $a < b < c$. É fácil ver que temos duas possibilidades:

(i) $f(a) < f(b)$ e $f(b) > f(c)$;
(ii) $f(a) > f(b)$ e $f(b) < f(c)$.

Tratemos da possibilidade (i). A possibilidade (ii) pode ser tratada analogamente. Temos $f(a) \le f(c)$ ou $f(a) \ge f(c)$. Vamos tratar do caso em que $f(a) \le f(c)$; o outro caso pode ser tratado analogamente. Como $a, b \in I$ e I é um intervalo, temos que $[a, b] \subset I$. Como $f|_{[a,b]}$ é contínua e $f(a) \le f(c) < f(b)$, o teorema do valor intermediário nos diz que existe $x \in [a, b]$ com $f(x) = f(c)$. Mas $x \le b < c$, donde $x \ne c$, contradizendo a injetividade de f. □

Proposição 2. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, com $D \subset \mathbb{R}$. Se f é monótona e $f(D)$ é um intervalo então f é contínua.*

Demonstração. Vamos tratar apenas do caso em que f é crescente; o caso em que f é decrescente pode ser tratado analogamente[1]. Seja $a \in D$ e vamos demonstrar que f é contínua no ponto a. Temos três possibilidades:

(i) $f(a)$ não é nem o maior nem o menor elemento do intervalo $f(D)$;
(ii) $f(a)$ é o maior elemento de $f(D)$;
(iii) $f(a)$ é o menor elemento de $f(D)$.

Vamos tratar apenas das possibilidades (i) e (ii), já que a possibilidade (iii) pode ser tratada analogamente à possibilidade (ii). Suponha primeiro que seja válida a possibilidade (i). Seja dado $\varepsilon > 0$. Existem então $y_1, y_2 \in f(D)$ tais que[2]:

$$f(a) - \varepsilon < y_1 < f(a) < y_2 < f(a) + \varepsilon.$$

[1]Ou pode ser obtido do caso em que f é crescente trocando f por $-f$.

[2]Por exemplo, para ver que y_2 existe, tome $p \in f(D)$ com $p > f(a)$ e y_2 igual à média aritmética entre $f(a)$ e $\min\{f(a) + \varepsilon, p\}$.

Sejam $x_1, x_2 \in D$ com $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Como $f(x_1) < f(a) < f(x_2)$ e f é crescente, temos que $x_1 < a < x_2$. Seja $\delta > 0$ tal que:

$$x_1 \le a - \delta < a < a + \delta \le x_2.$$

Dado $x \in D$ com $|x - a| < \delta$, vamos verificar que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Basta observar que:

$$\begin{aligned}|x - a| < \delta \Longrightarrow x_1 \le a - \delta < x < a + \delta \le x_2 \Longrightarrow f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)\\ \Longrightarrow f(a) - \varepsilon < y_1 \le f(x) \le y_2 < f(a) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Suponha agora que seja válida a possibilidade (ii). Se $f(D)$ possui apenas um ponto então f é constante e portanto contínua. Podemos então supor que $f(D)$ tem mais de um ponto, de modo que $f(a)$ é o maior, mas não o menor, elemento de $f(D)$. Seja novamente dado $\varepsilon > 0$. Como $f(a)$ não é o menor elemento de $f(D)$, existe (como antes) $y_1 \in f(D)$ tal que:

$$f(a) - \varepsilon < y_1 < f(a).$$

Seja $x_1 \in D$ com $f(x_1) = y_1$. Como $f(x_1) < f(a)$ e f é crescente, temos que $x_1 < a$. Seja $\delta > 0$ tal que:

$$x_1 \le a - \delta < a.$$

Dado $x \in D$ com $|x - a| < \delta$, vamos verificar que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Temos:

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow x_1 \le a - \delta < x \Longrightarrow f(a) - \varepsilon < y_1 = f(x_1) \le f(x).$$

Como $f(x) \in f(D)$ e $f(a)$ é o maior elemento de $f(D)$, temos também:

$$f(x) \le f(a) < f(a) + \varepsilon,$$

donde $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. □

A demonstração da Proposição 1 utilizou o seguinte lema.

Lema 1. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função, com $D \subset \mathbb{R}$. Se f não é monótona então existe um subconjunto S de D com exatamente 3 elementos tal que $f|_S$ não é monótona.*

Demonstração. Temos que f não é monótona se e somente se f não é crescente e f não é decrescente, isto é, se e somente se existem $x_1, y_1, x_2, y_2 \in D$ tais que:

$$x_1 \le y_1, \quad f(x_1) > f(y_1), \quad x_2 \le y_2, \quad f(x_2) < f(y_2).$$

Tome $X = \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$. Então $f|_X$ não é monótona e X tem no máximo 4 elementos. Note que X tem pelo menos 3 elementos, já que uma função cujo domínio tem menos do que 3 elementos é sempre monótona. Se X tiver exatamente 3 elementos, basta tomar $S = X$. Se tiver 4 elementos, a tese segue do resultado do Exercício 1 a seguir. □

Exercício 1. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função, onde $X \subset \mathbb{R}$ tem exatamente 4 elementos. Se f não é monótona, mostre que existe um subconjunto S de X com exatamente 3 elementos tal que $f|_S$ não é monótona. (Sugestão: escreva $X = \{a, b, c, d\}$, com $a < b < c < d$. Se a restrição de f a $\{a, b, c\}$ não é monótona, a tese vale. Se essa restrição for monótona, suponha que ela seja crescente (o caso em que ela é decrescente é tratado analogamente). Temos $f(a) \le f(b) \le f(c)$. Use o fato que f não é monótona para mostrar que $f(a) < f(c)$ e que $f(c) > f(d)$. Conclua que a restrição de f a $\{a, c, d\}$ não é monótona.)

Em aula, usamos as Proposições 1 e 2 para obter o seguinte teorema.

Teorema 1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função injetora definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se f é contínua então $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ também é contínua.*

Demonstração. Pela Proposição 1, f é monótona; segue do resultado do Exercício 9 da lista 10 que também f^{-1} é monótona. Mas a imagem de f^{-1} é o intervalo I e portanto, pela Proposição 2, f^{-1} é contínua. □

Obtivemos então o seguinte corolário.

Corolário 1. *Dado um inteiro positivo n, a função $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ (definida em $\mathbb{R}$ para n ímpar e em $[0, +\infty[$ para n par) é contínua.*

Demonstração. Segue do Teorema 1 e da continuidade da função $x \mapsto x^n$. (Você pode, usando o teorema do valor intermediário, mostrar como exercício que para n ímpar a função $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ é bijetora e que para n par a função $[0, +\infty[\ni x \mapsto x^n \in [0, +\infty[$ é bijetora.) □

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja $h = fg$. Mostre que, para todo $a \in \mathbb{R}$, vale que:

$$h \text{ é contínua no ponto } a \iff g(a) = 0.$$

Conclua que para qualquer subconjunto finito F de $\mathbb{R}$, existe uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujos pontos de continuidade sejam precisamente os pontos do conjunto F.

Exemplo 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida da seguinte maneira: se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, colocamos $f(x) = 0$. Se $x \in \mathbb{Q}$, escrevemos $x = \frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ e $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$; definimos então $f(x) = \frac{1}{b}$. Vimos em aula que, para todo $u \in \mathbb{R}$, f é contínua no ponto u se e somente se u é irracional.

Definição 1. Dizemos que um subconjunto D de $\mathbb{R}$ é *denso* se $\overline{D} = \mathbb{R}$.

Por exemplo, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são subconjuntos densos de $\mathbb{R}$.

Exercício 3. Dado $D \subset \mathbb{R}$, mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(a) D é denso;
(b) para todos $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existe $y \in D$ com $|x - y| < \varepsilon$;
(c) todo número real é limite de uma seqüência em D;
(d) para todo conjunto aberto não vazio $U \subset \mathbb{R}$, vale que $U \cap D \neq \emptyset$;
(e) para todos $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, vale que $]a, b[\cap D \neq \emptyset$;
(f) D^{c} tem interior vazio.

(Sugestão: mostre que (a)$\Leftrightarrow$(b), (a)$\Leftrightarrow$(c), $(a) \Leftrightarrow (f)$ e (b)$\Rightarrow$(d)$\Rightarrow$(e)$\Rightarrow$(b).)

Definição 2. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Dizemos que f é *uniformemente contínua* se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para todos $x, y \in D$, vale que:

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Por exemplo, uma função constante e a função identidade $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas. (No caso de uma função constante, qualquer $\delta > 0$ funciona para qualquer $\varepsilon > 0$ e no caso da função identidade, podemos tomar $\delta = \varepsilon$.) Obviamente, toda função uniformemente contínua é contínua.

Definição 3. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Dizemos que f é *Lipschitziana* se existe $k \geq 0$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|,$$

para todos $x, y \in D$. Um k com essa propriedade é chamado uma *constante de Lipschitz* para f.

Note que $k = 0$ é uma constante de Lipschitz para f se e somente se f é constante. Note também que se k é uma constante de Lipschitz para f então qualquer número real maior do que k também é uma constante de Lipschitz para f. Vimos em aula que toda função Lipschitziana é uniformemente contínua. (De fato, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, onde $k > 0$ é uma constante de Lipschitz para f.)

Exercício 4. Mostre que uma restrição de uma função uniformemente contínua é uniformemente contínua e que uma restrição de uma função Lipschitziana é Lipschitziana.

Observação. Segue do teorema do valor médio que se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função derivável com derivada limitada por uma constante $k \geq 0$ (ou seja, $|f'(x)| \leq k$, para todo $x \in I$) então f é Lipschitziana com constante de Lipschitz k. Assim, por exemplo, as funções seno e cosseno (definidas em $\mathbb{R}$) são Lipschitzianas com constante de Lipschitz $k = 1$. Além do mais, segue do teorema de Weierstrass, que toda função de classe C^1 num intervalo compacto é Lipschitziana.

Exemplo 2. A desigualdade:

$$\big||x| - |y|\big| \le |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

vista no início do curso nos diz que a função $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz $k = 1$ (e é, portanto, uniformemente contínua).

Os seguintes resultados foram vistos em aula:

Proposição 3. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com $D \subset \mathbb{R}$. Temos que f é uniformemente contínua se e somente se vale a seguinte condição: dadas arbitrariamente seqüências $(x_n)_{n\ge1}$, $(y_n)_{n\ge1}$ em D, se $x_n - y_n \to 0$ então $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.*

Proposição 4. *Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então f é uniformemente contínua.*

Exemplo 3. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua. Isso segue da Proposição 3 tomando $x_n = n + \frac{1}{n}$ e $y_n = n$. Por outro lado, se $D \subset \mathbb{R}$ é limitado então $f|_D$ é uniformemente contínua. De fato, nesse caso D está contido num compacto K e, em virtude da Proposição 4, $f|_K$ é uniformemente contínua. Assim, também $f|_D$ é uniformemente contínua (pelo resultado do Exercício 4).

Exemplo 4. A função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua, pela Proposição 4. No entanto, f não é Lipschitziana. De fato, se existisse uma constante de Lipschitz $k > 0$ para f, teríamos que:

$$\sqrt{x} = |f(x) - f(0)| \le k|x - 0| = kx,$$

para todo $x \in [0,1]$. Mas isso implicaria que $x \ge \frac{1}{k^2}$, para todo $x \in \,]0,1]$, o que obviamente é falso.

Exercício 5. Sejam $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. Mostre que se f é uniformemente contínua e $(x_n)_{n\ge1}$ é uma seqüência de Cauchy em D então $\big(f(x_n)\big)_{n\ge1}$ é uma seqüência de Cauchy também. Dê um exemplo que mostre que essa conclusão pode não valer se f for apenas contínua. (Note que para o seu exemplo ter chance de funcionar é necessário que $D \ne \mathbb{R}$, pois uma função contínua com domínio $\mathbb{R}$ leva seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy, mesmo que não seja uniformemente contínua.)

Exercício 6. Mostre que a função $f : [0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua. (Sugestão: mostre primeiramente que, para todo $c > 0$, a restrição de f ao intervalo $[c, +\infty[$ é Lipschitziana. Tenha em mente também o fato que a restrição de f a um intervalo compacto é uniformemente contínua.)