Décima-primeira Lista

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk
10/11/2018

Exercício 1. Em cada um dos itens abaixo, utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os pontos de máximo e mínimo global da função $f : S \to \mathbb{R}$ dada.

(a) $f(x, y) = x^2 y$, para todo $(x, y) \in S$, em que:
$$S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\big\};$$

(b) $f(x, y) = xy$, para todo $(x, y) \in S$, em que:
$$S = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\big\};$$

(c) $f(x, y, z) = x + y + z$, para todo $(x, y, z) \in S$, em que:
$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1\big\};$$

(d) $f(x, y, z) = xyz$, para todo $(x, y, z) \in S$, em que:
$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}.$$

Exercício 2. Considere o disco fechado
$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\big\}$$
de centro na origem e raio unitário. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ a função definida por
$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy,$$
para todo $(x, y) \in D$.

(a) Encontre os pontos críticos da restrição de f ao interior de D.

(b) Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os candidatos a máximo ou mínimo global da restrição de f à fronteira de D.

(c) Encontre os pontos de máximo e mínimo global de f.

Exercício 3. Considere o subconjunto D de $\mathbb{R}^2$ definido por:
$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi,\ y \leq \operatorname{sen} x \text{ e } y \geq \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big\}.$$
Determine os pontos de máximo e mínimo global da função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x, y) = x + y,$$
para todo $(x, y) \in D$.

Exercício 4. Considere o subconjunto D de $\mathbb{R}^3$ definido por:
$$D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 \leq z \text{ e } z \leq 3\big\}.$$
Determine os pontos de máximo e mínimo global da função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x, y, z) = x^2 + yz,$$
para todo $(x, y, z) \in D$.

Exercício 5. Sejam $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\mu : J \to \mathbb{R}^n$ curvas parametrizadas deriváveis, em que $I, J \subset \mathbb{R}$ são intervalos abertos (você pode assumir que $n = 2$ ou $n = 3$, caso se sinta mais confortável, mas essa hipótese não vai fazer diferença nenhuma na resolução do exercício).

(a) Considere a função diferenciável $f : I \times J \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(t, s) = \|\gamma(t) - \mu(s)\|^2 = \big(\gamma(t) - \mu(s)\big) \cdot \big(\gamma(t) - \mu(s)\big),$$
para todos $t \in I$, $s \in J$. Verifique que
$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, s) = 2\big(\gamma(t) - \mu(s)\big) \cdot \gamma'(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) = 2\big(\gamma(t) - \mu(s)\big) \cdot \mu'(s),$$
para todos $t \in I$ e $s \in J$.

(b) Suponha que a distância mínima entre as imagens de γ e μ seja realizada em pontos p_0 e q_0, isto é, suponha que p_0 seja um ponto na imagem de γ e q_0 seja um ponto na imagem de μ de modo que
$$\|p_0 - q_0\| \leq \|p - q\|,$$
para qualquer p na imagem de γ e qualquer q na imagem de μ. Sejam $t_0 \in I$ e $s_0 \in J$ tais que $\gamma(t_0) = p_0$ e $\mu(s_0) = q_0$. Usando o resultado do item (a), conclua que o vetor $p_0 - q_0$ ligando os pontos p_0 e q_0 é ortogonal a ambos os vetores tangentes $\gamma'(t_0)$ e $\mu'(s_0)$.

Exercício* 6 (Teorema de Weierstrass generalizado)**.** Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto fechado (mas não necessariamente limitado) e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

(a) Suponha que existam $r > 0$ e um ponto $p_0 \in D$ tais que

$$f(p) \geq f(p_0)$$

para todo $p \in D$ tal que $\|p\| > r$. Mostre que f possui um ponto de mínimo global. (Sugestão: seja r' o máximo entre r e $\|p_0\|$. Note que o conjunto $K = \{p \in D : \|p\| \leq r'\}$ é limitado, fechado e contém o ponto p_0. Verifique que o ponto de mínimo global da restrição de f a K — cuja existência é garantida pelo Teorema de Weierstrass — é na verdade um ponto de mínimo global de f em D.)

(b) Use o resultado do item (a) para concluir que se D é ilimitado[1] e se $\lim_{\|p\| \to +\infty} f(p) = +\infty$, então a função f possui um ponto de mínimo global.

(c) Enuncie e demonstre os resultados análogos aos resultados dos itens anteriores que possuam como tese a existência de um ponto de máximo global para f.

[1] Estou supondo que D é ilimitado para que o limite de $f(p)$ com $\|p\| \to +\infty$ faça sentido. Se D for limitado e não vazio, o próprio Teorema de Weierstrass já garante que f possui ponto de máximo e mínimo global.

Respostas

Exercício 1. Em todos os itens, a existência de máximo e mínimo global para f é garantida pelo Teorema de Weierstrass, já que f é contínua e S é compacto e não vazio.

(a) Os candidatos obtidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange são

$$(0,1),\quad (0,-1),\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$
$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\quad \text{e}\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

sendo que

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\quad \text{e}\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

são máximos globais e

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\quad \text{e}\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

são mínimos globais;

(b) os candidatos obtidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange são

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right),\quad \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right),\quad \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\quad \text{e}\quad \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right),$$

sendo que

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\quad \text{e}\quad \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

são máximos globais e

$$\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\quad \text{e}\quad \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$$

são mínimos globais;

(c) os candidatos obtidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange são

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}},\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{13}},\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right)\quad \text{e}\quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}},-\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{13}},-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right),$$

sendo que o primeiro deles é o máximo global e o segundo é o mínimo global;

(d) os candidatos obtidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange são

$$(1,0,0),\quad(-1,0,0),\quad(0,1,0),\quad(0,-1,0),\quad(0,0,1),\quad(0,0,-1),$$
$$\Big(\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big),\quad\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big),\quad\Big(\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big),\quad\Big(\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big),$$
$$\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big),\quad\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big),$$
$$\Big(\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)\quad\text{e}\quad\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$

sendo que

$$\Big(\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big),\quad\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big),$$
$$\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)\quad\text{e}\quad\Big(\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$

são máximos globais e

$$\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big),\quad\Big(\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big),$$
$$\Big(\tfrac{1}{\sqrt{3}},\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)\quad\text{e}\quad\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}},-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$

são mínimos globais.

Exercício 2.

(a) O único ponto crítico da restrição de f ao interior de D é $(0,0)$.

(b) Os candidatos a máximo ou mínimo global da restrição de f à fronteira de D são:

$$\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big),\quad\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big),\quad\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\quad\text{e}\quad\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

(c) A existência de máximo e mínimo global para f é garantida pelo Teorema de Weierstrass, já que f é contínua e D é compacto e não vazio. O ponto de mínimo global de f é $(0,0)$ e os pontos de máximo global são:

$$\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\quad\text{e}\quad\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Exercício 3. A existência de máximo e mínimo global para f é garantida pelo Teorema de Weierstrass, já que f é contínua e D é compacto e não vazio. A restrição de f ao interior de D não possui pontos críticos. A aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange para as restrições de f aos conjuntos

$$\big\{(x, \operatorname{sen} x) : \tfrac{\pi}{4} < x < \tfrac{3\pi}{4}\big\} \quad \text{e} \quad \Big\{\Big(x, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) : \tfrac{\pi}{4} < x < \tfrac{3\pi}{4}\Big\}$$

não produz candidatos a máximo ou mínimo. Os únicos candidatos são os pontos

$$\Big(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) \quad \text{e} \quad \Big(\tfrac{3\pi}{4}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big),$$

sendo que o primeiro deles é o ponto de mínimo global de f e o segundo é o ponto de máximo global de f.

Exercício 4. A existência de máximo e mínimo global para f é garantida pelo Teorema de Weierstrass, já que f é contínua e D é compacto e não vazio. O único ponto crítico da restrição de f ao interior de D é $(0, 0, 0)$. Os candidatos a máximo ou mínimo da restrição de f ao pedaço de parabolóide

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 1 \text{ e } z < 3\big\}$$

obtidos pelo método dos multiplicadores de Lagrange são:

$$\Big(0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{2}{3}\Big) \quad \text{e} \quad \Big(0, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{2}{3}\Big).$$

A função $h(x, y) = f(x, y, 3)$ não possui pontos críticos no disco aberto

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\big\} \tag{1}$$

e portanto f não possui máximo ou mínimo em:

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4 \text{ e } z = 3\big\}.$$

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange para obter os candidatos a máximo ou mínimo de h na fronteira de (1) obtemos os pontos

$$\Big(\tfrac{\sqrt{7}}{2}, \tfrac{3}{2}, 3\Big), \quad \Big(-\tfrac{\sqrt{7}}{2}, \tfrac{3}{2}, 3\Big), \quad (0, 2, 3) \quad \text{e} \quad (0, -2, 3)$$

como candidatos a máximo ou mínimo de f no círculo:

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } z = 3\big\}.$$

Assim, o ponto de mínimo global de f é $(0, -2, 3)$ e os pontos de máximo global de f são:

$$\Big(\tfrac{\sqrt{7}}{2}, \tfrac{3}{2}, 3\Big) \quad \text{e} \quad \Big(-\tfrac{\sqrt{7}}{2}, \tfrac{3}{2}, 3\Big).$$