Décima Lista

MAT0311 – Cálculo Diferencial e Integral V

Prof. Daniel Victor Tausk

26/10/2013

O objetivo do exercício abaixo é esclarecer exatamente quais são as condições sobre o domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ de uma função $f : U \to \mathbb{R}^m$ e sobre um ponto $x \in U$ para que possamos garantir a unicidade da diferencial de f no ponto x, isto é, para que possamos garantir que exista *no máximo uma* transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - T(h)}{\|h\|} = 0. \tag{1}$$

Note que é necessário que x seja um ponto de acumulação de U para que o limite (1) faça sentido.

Exercício* 1. Sejam U um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e x um ponto de U. Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é uma *direção limite* de U no ponto x se existe uma seqüência $(x_k)_{k\geq 1}$ em U e uma seqüência $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ em $]0, +\infty[$ tal que:

$$x_k \longrightarrow x \quad \text{e} \quad \lambda_k(x_k - x) \longrightarrow v.$$

Denote por T_xU o conjunto das direções limites de U no ponto x.

(a) Mostre que $0 \in T_xU$.

(b) Mostre que se $v \in T_xU$ e $\lambda \geq 0$ então $\lambda v \in T_xU$.

(c) Mostre que se $T_xU \neq \{0\}$ então x é um ponto de acumulação de U.

(d) Mostre que se $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$ e se $v \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\|v\| = 1$ então $v \in T_xU$ se e somente se existe uma seqüência $(x_k)_{k\geq 1}$ em $U \setminus \{x\}$ tal que:

$$x_k \longrightarrow x \quad \text{e} \quad \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|} \longrightarrow v.$$

(Sugestão: se $\lambda_k(x_k - x) \longrightarrow v$ e $\|v\| = 1$ então $\lambda_k\|x_k - x\| \longrightarrow 1$.)

(e) Mostre que se x é um ponto interior de U então $T_xU = \mathbb{R}^n$.

(f) Mostre que se x é um ponto de acumulação de U então $T_xU \neq \{0\}$. (Sugestão: se $(x_k)_{k\geq 1}$ é uma seqüência em $U \setminus \{x\}$ e $x_k \longrightarrow x$, note que a seqüência $v_k = \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|}$ possui uma subseqüência convergente e conclua que o limite de uma tal subseqüência está em T_xU.)

(g) Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma função e suponha que x seja um ponto de acumulação de U. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplicações lineares tais que (1) vale com $T = T_1$ e com $T = T_2$. Mostre que $T_1(v) = T_2(v)$ para todo $v \in T_xU$. (Sugestão: note primeiro que é possível supor sem perda de generalidade que $\|v\| = 1$. Use o resultado do item (d) e faça $h = x_k - x$ em (1).) Conclua que se T_xU gera $\mathbb{R}^n$ (como espaço vetorial) então $T_1 = T_2$.

(h) Suponha que x seja um ponto de acumulação de U e que T_xU não gere $\mathbb{R}^n$. Nesse caso, existe um funcional linear não nulo $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha(v) = 0$, para todo $v \in T_xU$. Tome $f = \alpha|_U$. Mostre que (1) vale com $T = \alpha$ e com $T = 0$. (Sugestão: para ver que (1) vale com $T = 0$, suponha por absurdo que isso não ocorre e obtenha $\varepsilon > 0$ e uma seqüência $(h_k)_{k\geq 1}$ convergindo para 0 tal que $h_k \neq 0$, $x + h_k \in U$ e tal que $\frac{|\alpha(h_k)|}{\|h_k\|} \geq \varepsilon$, para todo $k \geq 1$. Passando a uma subseqüência, você pode supor que $\frac{h_k}{\|h_k\|} \longrightarrow v$. Note que $v \in T_xU$.)