Décima Lista

MAT0216 – Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Daniel Victor Tausk

25/05/2019

Exercício 1. Calcule a integral de linha $\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, para $\vec{F}$ e γ definidos em cada um dos itens abaixo.

(a) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ são definidos por

$$\vec{F}(x, y) = (-y, x) \quad \text{e} \quad \gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e todo $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ são definidos por

$$\vec{F}(x, y, z) = (z^2, x - y, x + y) \quad \text{e} \quad \gamma(t) = (1, t, t^2),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e todo $t \in [0, 1]$.

(c) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por

$$\vec{F}(x, y) = (y, x),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e γ é obtida pela concatenação de uma parametrização do segmento de reta que começa no ponto $(0, 0)$ e termina no ponto $(1, 2)$ com uma parametrização do segmento de reta que começa no ponto $(1, 2)$ e termina no ponto $(3, 0)$.

(d) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por

$$\vec{F}(x, y) = (xy, x^2 + y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e γ é uma parametrização do retângulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ e $(0, 1)$ que dá uma única volta no retângulo e percorre o lado ligando os vértices $(0, 0)$ e $(2, 0)$ no sentido do vértice $(0, 0)$ para o vértice $(2, 0)$.

(e) $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definido por

$$\vec{F}(x, y) = (x + y, y - x),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e γ é obtida pela concatenação de uma parametrização do segmento de reta que começa no ponto $(-1, 0)$ e termina no ponto $(1, 0)$ com uma parametrização do semicírculo

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \geq 0\big\}$$

no sentido do ponto $(1, 0)$ para o ponto $(-1, 0)$.

Exercício 2. Em cada um dos itens abaixo, decida se o campo vetorial $\vec{F}$ dado é ou não conservativo.

(a) $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é definido por

$$\vec{F}(x,y)=(xy^2,x^2y),$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(b) $\vec{F}:U\to\mathbb{R}^3$ é definido por

$$\vec{F}(x,y,z)=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}}\,,$$

para todo $(x,y,z)\in U$, em que U denota a bola aberta em $\mathbb{R}^3$ de centro na origem e raio 1.

(c) $\vec{F}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ é definido por

$$\vec{F}(x,y,z,t)=(x+y+z,x+y^2+t,x+\cos z+t^2,y+tz),$$

para todo $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

(d) $\vec{F}:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^2$ é definido por

$$\vec{F}(x,y)=\frac{(x-y,x+y)}{x^2+y^2}\,,$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

Exercício 3 (potencial de interação entre duas partículas)**.** Seja dada uma função derivável $v:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ e seja $V:U\to\mathbb{R}$ a função diferenciável dada por

$$V(x,y)=v\big(\|x-y\|\big),$$

para todo (x,y) no subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^{2k}=\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k$ definido por[1]:

$$U=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k : x\neq y\big\}. \tag{1}$$

Verifique que o gradiente de V é dado por

$$\nabla V(x,y)=\frac{v'\big(\|x-y\|\big)}{\|x-y\|}(x-y,y-x),$$

para todo $(x,y)\in U$.

[1]Embora $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k$ não seja a rigor exatamente a mesma coisa que $\mathbb{R}^{2k}$, nós trataremos ambos os espaços como se fossem iguais. Assim, dados $x=(x_1,\ldots,x_k)$ e $y=(y_1,\ldots,y_k)$ em $\mathbb{R}^k$, nós usaremos o par (x,y) — que é um elemento de $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k$ — como uma notação abreviada para $(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k)$, que é um elemento de $\mathbb{R}^{2k}$.

Exercício 4. Seja $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere o campo vetorial contínuo $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ dado por

$$\vec{F}(x, y) = \frac{f\big(\|x - y\|\big)}{\|x - y\|}(x - y, y - x),$$

para todo $(x, y) \in U$, em que U é o subconjunto aberto de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ definido em (1). Use o resultado do Exercício 3 para concluir que o campo $\vec{F}$ é conservativo. Note que se $k = 3$, então o campo vetorial $\vec{F}$ descreve a lei de força correspondente à interação gravitacional entre partículas de massas $m_1 > 0$ e $m_2 > 0$ no caso particular em que a função f é dada por

$$f(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2},$$

para todo $r > 0$ e G denota a constante universal da gravitação. Isso significa que se $x, y \in \mathbb{R}^3$ são as posições das partículas, então

$$\vec{F}(x, y) = \big(\vec{F}_1(x, y), \vec{F}_2(x, y)\big) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

sendo $\vec{F}_1(x, y)$ a força gravitacional incidente sobre a primeira partícula (que está na posição x) e $\vec{F}_2(x, y)$ a força gravitacional incidente sobre a segunda partícula (que está na posição y). Analogamente, tomando

$$f(r) = \frac{Kq_1q_2}{r^2},$$

sendo $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ a constante de Coulomb e $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ as cargas das partículas, então $\vec{F}$ descreve a lei de força elétrica de Coulomb. Usando o resultado do Exercício 3, obtenha tanto no caso da força gravitacional como no caso da força elétrica uma fórmula explícita para a função potencial $V : U \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = -\nabla V$.

Exercício* 5 (sistema com n partículas)**.** Neste exercício nós vamos generalizar de duas para n partículas os resultados dos Exercícios 3 e 4. Sejam dadas funções deriváveis $v_{ij} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ para todos $i, j = 1, \ldots, n$ com $i \neq j$ de modo que $v_{ij} = v_{ji}$ para quaisquer i e j. Nós pensaremos no espaço[2] $\mathbb{R}^{nk} = (\mathbb{R}^k)^n$ como sendo o espaço de configuração para um sistema de n partículas em $\mathbb{R}^k$. Considere o subconjunto aberto U de $(\mathbb{R}^k)^n$ definido por

$$U = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^k)^n : x_i \neq x_j, \text{ para } i, j = 1, \ldots, n \text{ com } i \neq j\big\},$$

isto é, U é formado pelas configurações em que não há duas partículas na mesma posição. Se $V : U \to \mathbb{R}$ é a função diferenciável definida por

$$V(x) = \sum_{\substack{i,j=1,\ldots,n \\ i<j}} v_{ij}(\|x_i - x_j\|),$$

para todo $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, verifique que o gradiente de V é dado por

$$\nabla V(x) = \big(\vec{F}_1(x), \ldots, \vec{F}_n(x)\big),$$

para todo $x \in U$, em que

$$\vec{F}_i(x) = \sum_{\substack{j=1,\ldots,n \\ j\neq i}} \frac{v'_{ij}(\|x_i - x_j\|)}{\|x_i - x_j\|}(x_i - x_j),$$

para todo $x \in U$ e todo $i = 1, \ldots, n$. Tomando $k = 3$ e

$$v_{ij}(r) = -\frac{Gm_i m_j}{r},$$

para todo $r > 0$ e todos $i, j = 1, \ldots, n$ com $i \neq j$, note que $\vec{F} = -\nabla V$ descreve a lei de força correspondente à interação gravitacional entre as n partículas, sendo $m_i > 0$ a massa da i-ésima partícula e G a constante universal da gravitação. Isso significa que $\vec{F}_i(x)$ é a força gravitacional incidente sobre a i-ésima partícula se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ denotam as posições das n partículas. Similarmente, tomando

$$v_{ij}(r) = \frac{Kq_i q_j}{r},$$

para todo $r > 0$ e todos $i, j = 1, \ldots, n$ com $i \neq j$, então $\vec{F} = -\nabla V$ descreve a lei de força correspondente à interação elétrica entre as n partículas, sendo $q_i \in \mathbb{R}$ a carga da i-ésima partícula e K a constante de Coulomb.

[2]De modo análogo ao que fizemos no Exercício 3, nós trataremos os espaços $\mathbb{R}^{nk}$ e $(\mathbb{R}^k)^n$ como se fossem iguais, usando a n-upla $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^k)^n$ de elementos $x_i \in \mathbb{R}^k$ como uma notação abreviada para o elemento de $\mathbb{R}^{nk}$ obtido pela junção de todas essas k-uplas x_i numa única (nk)-upla de números reais.

Sugestões

Exercício 3. Para visualizar melhor o que está acontecendo, escreva as fórmulas para V e ∇V mais explicitamente, como segue:

$$\begin{aligned} V(x,y) &= V(x_1,x_2,\ldots,x_k,y_1,y_2,\ldots,y_k) \\ &= v\Big(\big((x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_k-y_k)^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big), \\ \nabla V(x,y) &= \Big(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x,y),\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_k}(x,y),\frac{\partial V}{\partial y_1}(x,y),\ldots,\frac{\partial V}{\partial y_k}(x,y)\Big). \end{aligned}$$

Exercício 5. É conveniente usar uma notação em que as nk coordenadas de um elemento de $(\mathbb{R}^k)^n$ sejam denotadas usando dois índices, sendo que o primeiro índice varia de 1 a n e indica o número da partícula e o segundo índice varia de 1 a k e indica qual coordenada da posição da partícula estamos considerando. Mais explicitamente, para $x \in (\mathbb{R}^k)^n$ escrevemos

$$x = (x_1,\ldots,x_n),$$

com $x_i \in \mathbb{R}^k$ para $i = 1,\ldots,n$ e

$$x_i = (x_{i1},\ldots,x_{ik}),$$

com $x_{im} \in \mathbb{R}$ para $m = 1,\ldots,k$. Com essa convenção, a função $\vec{F}_i$ que descreve o i-ésimo bloco de coordenadas do gradiente de V é dada por

$$\vec{F}_i(x) = \Big(\frac{\partial V}{\partial x_{i1}}(x),\frac{\partial V}{\partial x_{i2}}(x),\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_{ik}}(x)\Big), \tag{2}$$

para todo $x \in U$ e todo $i = 1,\ldots,n$.

Respostas

Exercício 1. (a) Temos:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) \, \mathrm{d}t = 2\pi.$$

(b) Temos:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (1 + t + 2t^2) \, \mathrm{d}t = \frac{13}{6} \cdot$$

(c) Temos:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 4t \, \mathrm{d}t + \int_0^1 (2 - 8t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

(d) Temos:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^2 0 \, \mathrm{d}t + \int_0^1 (4 + t) \, \mathrm{d}t + \int_2^0 t \, \mathrm{d}t + \int_1^0 t \, \mathrm{d}t = 2.$$

(e) Temos:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{-1}^1 t \, \mathrm{d}t + \int_0^\pi -(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) \, \mathrm{d}t = -\pi.$$

Exercício 2. (a) $\vec{F}$ é conservativo pois sua matriz Jacobiana é simétrica e seu domínio é convexo.

(b) $\vec{F}$ é conservativo pois sua matriz Jacobiana é simétrica e seu domínio é convexo.

(c) $\vec{F}$ não é conservativo pois sua matriz Jacobiana não é simétrica. Mais especificamente, temos

$$\frac{\partial F_3}{\partial t}(x, y, z, t) = 2t \neq \frac{\partial F_4}{\partial z}(x, y, z, t) = t.$$

(d) $\vec{F}$ não é conservativo pois

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2\pi \neq 0,$$

em que $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é a curva fechada definida por

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$. Note que a matriz Jacobiana de $\vec{F}$ é simétrica, mas isso por si só não garante que $\vec{F}$ seja conservativo (e, de fato, nesse caso $\vec{F}$ não é conservativo) sem hipóteses adicionais sobre o domínio de $\vec{F}$.

Exercício 4. Uma função $V : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com $\vec{F} = -\nabla V$ é definida como no enunciado do Exercício 3, tomando v tal que $v' = -f$. A existência de v segue do fato que toda função contínua num intervalo possui uma primitiva. Mais explicitamente, v pode ser definida pela integral $v(r) = -\int_{r_0}^{r} f$ para todo $r > 0$, em que $r_0 > 0$ é fixado arbitrariamente. No caso da força gravitacional, tomamos

$$v(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}\,,$$

para todo $r > 0$ e portanto

$$V(x, y) = -\frac{Gm_1m_2}{\|x - y\|}\,,$$

para todo $(x, y) \in U$. No caso da força elétrica, tomamos

$$v(r) = \frac{Kq_1q_2}{r}\,,$$

para todo $r > 0$ e portanto

$$V(x, y) = \frac{Kq_1q_2}{\|x - y\|}\,,$$

para todo $(x, y) \in U$.

Exercício 5. Usamos a notação descrita na sugestão para denotar os elementos de $(\mathbb{R}^k)^n$. Fixado $i = 1, \ldots, n$, temos que no cálculo das derivadas parciais $\frac{\partial V}{\partial x_{im}}$, $m = 1, \ldots, k$, que aparecem no lado direito da igualdade (2) podemos desprezar os termos na definição de V em que x_i nem aparece, isto é, temos

$$\frac{\partial V}{\partial x_{im}} = \frac{\partial V_i}{\partial x_{im}}, \quad m = 1, \ldots, k,$$

em que V_i é a soma dos termos no somatório do lado direito da igualdade

$$V(x) = \sum_{\substack{r,s=1,\ldots,n \\ r<s}} v_{rs}(\|x_r - x_s\|)$$

em que x_i aparece. Note que dentre esses termos há aqueles em que i aparece no primeiro índice (isto é, $r = i$) e aqueles em que i aparece no segundo índice (isto é, $s = i$). Mais explicitamente, temos

$$V_i(x) = \sum_{\substack{j=1,\ldots,n \\ j>i}} v_{ij}(\|x_i - x_j\|) + \sum_{\substack{j=1,\ldots,n \\ j<i}} v_{ji}(\|x_j - x_i\|),$$

para todo $x \in U$. Como $v_{ij}(\|x_i - x_j\|) = v_{ji}(\|x_j - x_i\|)$ para todo $j \neq i$, obtemos a expressão mais simples

$$V_i(x) = \sum_{\substack{j=1,\ldots,n \\ j\neq i}} v_{ij}(\|x_i - x_j\|),$$

para V_i. O cálculo das derivadas parciais de V_i agora é feito como na resolução do Exercício 3, isto é

$$\frac{\partial V}{\partial x_{im}}(x) = \frac{\partial V_i}{\partial x_{im}}(x) = \sum_{\substack{j=1,\ldots,n \\ j\neq i}} \frac{v'_{ij}(\|x_i - x_j\|)}{\|x_i - x_j\|}(x_{im} - x_{jm}), \tag{3}$$

para todo $x \in U$ e todo $m = 1, \ldots, k$. De (2) e (3) agora segue que

$$\vec{F}_i(x) = \sum_{\substack{j=1,\ldots,n \\ j\neq i}} \frac{v'_{ij}(\|x_i - x_j\|)}{\|x_i - x_j\|}(x_i - x_j),$$

para todo $x \in U$, como queríamos.