Décima Lista

MAT0121 – Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Daniel Victor Tausk

02/11/2018

Definição. Seja $v \in \mathbb{R}$ um escalar positivo. Dizemos que uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 *satisfaz a equação da onda com velocidade de propagação* v se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = 0, \tag{1}$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

A equação (1) descreve, assumindo certas hipóteses, o movimento de uma corda vibrante, sob certas aproximações[1]. Para cada instante de tempo $t \in \mathbb{R}$, o formato da corda seria dado pelo gráfico da função $u_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $u_t(x) = u(t,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 1. Seja $v \in \mathbb{R}$ um escalar positivo. Dadas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, mostre que a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(t,x) = f(x - vt) + g(x + vt), \tag{2}$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ é uma função de classe C^2 que satisfaz a equação da onda com velocidade de propagação v. Note que o gráfico da função $f_t(x) = f(x - vt)$ é obtido do gráfico de f por uma translação de vt na direção e sentido do eixo x. Assim, se temos um desenho se movendo com o tempo que é dado pelo gráfico de f_t no instante t, então esse desenho em movimento será o gráfico de f movendo-se com velocidade constante e igual a v na direção e sentido do eixo x. Similarmente, o desenho que no instante t é dado pelo gráfico de $g_t = g(x + vt)$ será o gráfico de g movendo-se com velocidade v no sentido oposto. A solução (2) da equação da onda é, portanto, uma superposição de duas ondas viajando com velocidade constante e igual a v em sentidos opostos.

[1] As hipóteses são: ausência de forças externas à corda e densidade constante de massa em relação ao comprimento quando a corda está estendida ao longo do eixo x. Assim, se $\rho > 0$ denota essa densidade constante, a massa do trecho da corda entre $x = a$ e $x = b$ é igual a $\rho(b - a)$, para $a < b$. As aproximações são: a força agindo num ponto da corda é tangente à corda (não há forças fazendo a corda torcer), o movimento de um ponto material da corda é paralelo ao eixo y e a componente paralela ao eixo x da força agindo num ponto da corda não varia com o tempo (ela também não depende do ponto da corda, mas isso é consequência da hipótese de que o movimento de cada ponto material é paralelo ao eixo y). Se T denota a componente paralela ao eixo x dessa força (tensão da corda), então a velocidade v que aparece na equação (1) será $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

O objetivo do Exercício 3 mais abaixo é mostrar que toda solução u de classe C^2 da equação da onda (1) é da forma (2). O Exercício 2 a seguir apresenta um resultado preparatório.

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k, com $k \geq 1$.

(a) Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mostre que existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^k tal que $f(x, y) = g(y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Em outras palavras, $f(x, y)$ não depende de x. (Sugestão: recorde que uma função de uma variável que possui derivada nula num intervalo é constante nesse intervalo. Para ver que g é de classe C^k, note que $g(y) = f(0, y)$.)

(b) Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mostre que existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^k tal que $f(x, y) = g(x)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Em outras palavras, $f(x, y)$ não depende de y.

(c) Suponha que $k \geq 2$. Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mostre que existem funções $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^k tais que $f(x, y) = g_1(x) + g_2(y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Em outras palavras, f é soma de uma função só de x com uma função só de y. (Sugestão: use o resultado do item (a) para a função $\frac{\partial f}{\partial y}$ para obter $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(y)$. Tome $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma primitiva de g e depois use o resultado do item (b) para a função $h(x, y) = f(x, y) - g_2(y)$.)

Exercício 3. Sejam $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $v \in \mathbb{R}$ um escalar positivo. Considere a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(p, q) = u\Big(\frac{q - p}{2v}, \frac{q + p}{2}\Big),$$

para todo $(p, q) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Verifique que $u(t, x) = \varphi(x - vt, x + vt)$, para todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = 4\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q}(x - vt, x + vt),$$

para todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Usando o resultado do item (c) do Exercício 2, conclua que se u é uma solução da equação da onda com velocidade de propagação v, então existem funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tais que (2) vale, para todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$.

Definição. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$. O *Laplaciano* de f é a função $\Delta f : U \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Delta f(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p),$$

para todo $p \in U$.

O Laplaciano aparece em várias equações diferenciais parciais clássicas da física tais como a equação da onda e a equação do calor em mais de uma dimensão (em uma dimensão o Laplaciano é nada mais do que a derivada segunda). Além do mais, se $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 descrevendo uma densidade de massa no espaço (satisfazendo uma propriedade adequada de decaimento no infinito) e se $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ denota o potencial gravitacional[2] produzido por essa distribuição de massa, então o Laplaciano de V é proporcional a ρ. Mais precisamente, temos $\Delta V = 4\pi G\rho$, em que G denota a constante universal da gravitação.

Exercício 4 (Laplaciano em coordenadas polares)**.** Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida num subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$ e considere a função $g : V \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta),$$

para todo $(\rho, \theta) \in V$, em que $V = \big\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \in U\big\}$. Dado $(\rho, \theta) \in V$ e definindo $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \in U$, calcule:

(a) as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta)$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta)$ em função das derivadas parciais de primeira e segunda ordem de f no ponto (x, y);

(b) as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta)$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta)$ em função das derivadas parciais de primeira e segunda ordem de f no ponto (x, y).

Usando os resultados dos itens (a) e (b), mostre que o Laplaciano de f é dado por

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta),$$

se $\rho \neq 0$.

Quando $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$ dizemos que ρ e θ são *coordendas polares* para o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Temos que $|\rho|$ é a distância de (x, y) até a origem e θ é uma medida para o ângulo entre o vetor posição do ponto (x, y) e o eixo das abscissas. A função g no Exercício 4 é portanto uma representação da função f em coordenadas polares: ela expressa o valor de f num ponto do plano em função das coordenadas polares desse ponto.

[2] Isto é, se uma partícula de massa m está num ponto $p \in \mathbb{R}^3$, então a força gravitacional agindo nessa partícula será $-m\nabla V(p)$.

Respostas

Exercício 4.
(a) as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta)$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho,\theta)$ são dadas por:

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho,\theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\operatorname{sen}^2\theta;$$

(b) as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta)$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho,\theta)$ são dadas por:

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\rho\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\rho\cos\theta,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho,\theta) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\rho^2\operatorname{sen}^2\theta - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\rho^2\cos^2\theta - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\rho\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\rho\operatorname{sen}\theta.\end{aligned}$$