Décima Lista

MAT0111 – Cálculo Diferencial e Integral I

Prof. Daniel Victor Tausk

19/06/2013

Exercício 1. Encontre as soluções gerais das equações diferenciais abaixo:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y^2 + 1)\cos x$;

(b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^y \ln x$.

Exercício 2. Calcule a derivada da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \int_{x^2}^{\operatorname{tg} x} x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. Sejam m, n números inteiros e considere a integral indefinida:

$$\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x\,\mathrm{d}x.$$

Investigue quais as condições sobre m e n para que:

(a) a substituição $y = \operatorname{tg} x$ transforme o integrando numa função racional de y;

(b) a substituição $y = \sec x$ transforme o integrando numa função racional de y.

Exercício* 4. Sejam $a : I \to \mathbb{R}$, $b : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas definidas num intervalo I. O objetivo deste exercício é determinar a solução geral da seguinte *equação diferencial linear de primeira ordem*:

$$f'(x) = a(x)f(x) + b(x), \tag{1}$$

ou seja, queremos determinar o conjunto de todas as funções deriváveis $f : I \to \mathbb{R}$ tais que (1) é satisfeita, para todo $x \in I$.

(a) Seja $A : I \to \mathbb{R}$ uma primitiva da função a. Verifique que (1) é equivalente a:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)e^{-A(x)}\big) = b(x)e^{-A(x)}.$$

(b) Conclua que se $H : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função:

$$h(x) = b(x)e^{-A(x)}$$

então a solução geral de (1) é:

$$f(x) = e^{A(x)}\big(H(x) + c\big),$$

com $c \in \mathbb{R}$ arbitrário.

(c) Encontre a solução geral da equação diferencial:

$$f'(x) = xf(x) + 3x.$$

Exercício* 5. Considere uma integral indefinida cujo integrando seja uma função racional em senos e cossenos, i.e., uma integral indefinida da forma:

$$\int \frac{\sum_{m,n=0}^{p} a_{mn} \cos^m x \operatorname{sen}^n x}{\sum_{m,n=0}^{p} b_{mn} \cos^m x \operatorname{sen}^n x}\, \mathrm{d}x,$$

onde p é um inteiro positivo e a_{mn}, b_{mn}, $m, n = 0, 1, \ldots, p$ são números reais. Mostre que a substituição $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ transforma o integrando numa função racional. (Sugestão: verifique que $\operatorname{sen} x = \frac{2y}{1+y^2}$, $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ e que $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$.)