# Primeira Lista – Complemento

**MAT0206 – Análise Real**
**MAP0216 – Introdução à Análise Real**

Prof. Daniel Victor Tausk
10/03/2012

O objetivo dos dois exercícios a seguir é o de estabelecer a equivalência entre duas abordagens para se definir uma ordem num corpo (de modo a torná-lo um corpo ordenado). Recorde que, no nosso curso, um corpo ordenado é um corpo munido de uma relação de ordem total $\leq$ compatível com as operações de soma e multiplicação. Os exercícios mostram que a ordem pode, alternativamente, ser definida através da especificação do conjunto $P$ dos *elementos positivos* do corpo, o qual deve satisfazer uma lista de propriedades (que aparecem no Exercício 7 abaixo).

**Exercício 7.** Seja $K$ um corpo ordenado e denote por $P$ o conjunto dos elementos positivos de $K$:

$$P = \big\{x \in K : x > 0\big\}.$$

Mostre que as seguintes condições são satisfeitas:

(1) para todos $x, y \in P$, vale que $x + y \in P$ e $xy \in P$;
(2) $0 \notin P$;
(3) para todo $x \in K$ com $x \neq 0$, vale que $x \in P$ ou $-x \in P$.

Verifique também que, para todos $x, y \in K$:

$$x < y \Longleftrightarrow y - x \in P.$$

**Exercício 8.** Sejam $K$ um corpo e $P$ um subconjunto de $K$ satisfazendo as condições (1), (2) e (3) que aparecem no enunciado do Exercício 7. Defina uma relação binária $<$ em $K$ fazendo:

$$x < y \Longleftrightarrow y - x \in P, \quad x, y \in K.$$

Mostre que as seguintes condições são satisfeitas:

- para todo $x \in K$, não é o caso que $x < x$;
- para todos $x, y, z \in K$, se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;
- para todos $x, y \in K$, vale que ou $x = y$, ou $x < y$ ou $y < x$;
- para todos $x, y, z \in K$, se $x < y$ então $x + z < y + z$;
- para todos $x, y, z \in K$, se $x < y$ e $z > 0$ então $xz < yz$.

Conclua, usando o resultado dos Exercícios 4, 5 e 6 da lista 1, que $K$ torna-se um corpo ordenado se definirmos a relação de ordem $\leq$ fazendo:

$$x \leq y \Longleftrightarrow x < y \text{ ou } x = y, \quad x, y \in K.$$

Verifique que $P$ é precisamente o conjunto dos elementos positivos de $K$.