Primeira Lista

MAT5798 – Medida e Integração

Prof. Daniel Victor Tausk

16/03/2018

Exercício 1. Sejam X um conjunto e $\mathcal{R}$ um anel (resp., σ-anel) contido em $\wp(X)$. Mostre que $\mathcal{R}$ é uma álgebra (resp., σ-álgebra) de partes de X se, e somente se, $X \in \mathcal{R}$.

Exercício 2. Sejam X um conjunto e $\mathcal{C}$ um subconjunto de $\wp(X)$. Mostre que o anel (resp., σ-anel) gerado por $\mathcal{C}$ coincide com a álgebra (resp., σ-álgebra) de partes de X gerada por $\mathcal{C}$ se, e somente se, X é igual a uma união finita (resp., enumerável) de elementos de $\mathcal{C}$.

Exercício 3. Sejam X um conjunto e $\mathcal{R}$ um anel (resp., σ-anel) contido em $\wp(X)$. Denote por $\mathcal{R}'$ o conjunto:

$$\mathcal{R}' = \big\{X \setminus A : A \in \mathcal{R}\big\}.$$

Mostre que $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ coincide com a álgebra (resp., σ-álgebra) gerada por $\mathcal{R}$. Mostre também que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são disjuntos se, e somente se, $X \notin \mathcal{R}$.

Exercício 4. Sejam X um conjunto e $\mathcal{S}$ um subconjunto não vazio de $\wp(X)$ que seja fechado por interseções finitas e tal que o complementar em X de qualquer elemento de $\mathcal{S}$ seja igual à união disjunta de uma quantidade finita não nula de elementos de $\mathcal{S}$. Mostre que $\mathcal{S}$ é um semi-anel.

Exercício 5. Dados semi-anéis $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, mostre que o conjunto

$$\big\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{S}_1,\ A_2 \in \mathcal{S}_2\big\}$$

também é um semi-anel.

Exercício 6. Dado um espaço topológico X, mostre que a coleção $\mathrm{Clop}(X)$ de todos os subconjuntos de X que são ao mesmo tempo abertos e fechados em X (os *clopens* de X) é uma álgebra de partes de X. Seja $\mathcal{C} \subset \mathrm{Clop}(X)$ com $\emptyset \in \mathcal{C}$ e seja $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ uma medida finitamente aditiva em $\mathcal{C}$. Mostre que se X é compacto, então μ é σ-aditiva.

Exercício 7. Sejam X e Y conjuntos e $f : X \to Y$ uma função. Denote por

$$f^* : \wp(Y) \longrightarrow \wp(X)$$

a função que a cada subconjunto A de Y associa a sua imagem inversa $f^{-1}[A]$ pela função f.

(a) Mostre que f é sobrejetora se, e somente se, f^* é injetora.
(b) Mostre que f é injetora se, e somente se, f^* é sobrejetora.
(c) Dado $\mathcal{C} \subset \wp(Y)$, denote por

$$f^*[\mathcal{C}] = \{f^{-1}[A] : A \in \mathcal{C}\}$$

a imagem direta de $\mathcal{C}$ por f^*. Mostre que se $\mathcal{C}$ é uma álgebra de partes de Y (resp., um anel, uma σ-álgebra de partes de Y, um σ-anel, um semi-anel), então $f^*[\mathcal{C}]$ é uma álgebra de partes de X (resp., um anel, uma σ-álgebra de partes de X, um σ-anel, um semi-anel). Se f for sobrejetora, mostre que vale a recíproca dessa última afirmação.
(d) Sejam $\mathcal{D} \subset \wp(X)$ com $\emptyset \in \mathcal{D}$ e $\mu : \mathcal{D} \to [0, +\infty]$ uma medida finitamente aditiva em $\mathcal{D}$. Dado $\mathcal{C} \subset \wp(Y)$ com $\emptyset \in \mathcal{C}$ e $f^*[\mathcal{C}] \subset \mathcal{D}$, mostre que $\mu \circ f^*|_{\mathcal{C}}$ é uma medida finitamente aditiva em $\mathcal{C}$ que será σ-aditiva se μ o for.
(e) Suponha que f seja sobrejetora e sejam $\mathcal{C} \subset \wp(Y)$ com $\emptyset \in \mathcal{C}$ e $\mu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ uma medida finitamente aditiva. Mostre que

$$\mu \circ (f^*)^{-1} : f^*[\mathcal{C}] \longrightarrow [0, +\infty]$$

é uma medida finitamente aditiva em $f^*[\mathcal{C}]$ que será σ-aditiva se μ o for.

Exercício 8 (a moeda honesta)**.** Seja $X = \prod_{n=1}^{\infty}\{0, 1\}$ o conjunto de todas as sequências de 0's e 1's e para cada $n \geq 1$ seja $X_n = \{0, 1\}^n$ o conjunto das n-uplas de 0's e 1's. Denote por $P_n : X \to X_n$ a projeção nas n primeiras coordenadas. Sejam $\mathcal{A}_n = P_n^*[\wp(X_n)]$, $\lambda_n : \wp(X_n) \to [0, 1]$ a medida de contagem com pesos que atribui peso $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ a cada ponto de X_n e $\mu_n : \mathcal{A}_n \to [0, 1]$ dada por $\mu_n = \lambda_n \circ (P_n^*)^{-1}$. Segue dos resultados mostrados no Exercício 7 que cada $\mathcal{A}_n$ é uma σ-álgebra de partes de X e que cada μ_n é uma medida σ-aditiva.

(a) Mostre que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ e que μ_{n+1} estende μ_n, para todo $n \geq 1$.
(b) Mostre que $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ é uma álgebra de partes de X e que a função $\mu : \mathcal{A} \to [0, 1]$ que estende todas as funções μ_n é uma medida finitamente aditiva.
(c) Mostre que μ é σ-aditiva. (Sugestão: use o resultado do Exercício 6.)